



Grundriß

der

Differential-Rechnung

von

Dr. Ludwig Kiepert, Dr. Ing.,
Geheimer Regierungsrat,
Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover.

Dreizehnte unveränderte Auflage
des gleichnamigen Leitfadens

von weil. Dr. Max Stegemann.

Zweiter Band.

(Manuldruck)

Hannover 1920.
Helwingsche Verlagsbuchhandlung.

Vorbemerkung des Verlags.

Um die Benutzung des durch seinen Umfang etwas unhandlich gewordenen Bandes zu erleichtern, soll die

14. vollständig umgearbeitete Auflage von Kieperts Differential-Rechnung

in größerem Format erscheinen und in zwei Bände etwa gleichen Umfanges zerlegt werden. Beide Bände werden in sich abgeschlossen und einzeln käuflich sein.

Der erste Band (Seite 1—509 und 811—825 der 13. Auflage) enthält den ersten Teil des Werkes „Funktionen von einer unabhängigen Veränderlichen“ und gelangt soeben zur Ausgabe. Der zweite Band (Seite 510—810 und 830—863 der 13. Auflage) enthält die Teile 2 und 3 des Werkes „Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra“ und „Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen“.

Bei den immer schwieriger werdenden Herstellungsverhältnissen läßt sich der Zeitpunkt für die Fertigstellung der 14. Auflage des zweiten Bandes noch icht bestimmt angeben. Um nun ein längeres Fehlen des beliebten Lehrbuches zu vermeiden, haben wir uns mit Genehmigung des Herrn Verfassers entschlossen, von den entsprechenden Teilen der 13. Auflage einen unveränderten Neudruck (Manuldruck) herzustellen. Dieser Neudruck schließt — abgesehen von den abweichenden Seitenzahlen und dem abweichenden Formate — inhaltlich genau an die 14. Auflage des ersten Bandes an und kann ohne Störung neben ihr benutzt werden. Er wird demnächst beim Erscheinen der 14. Auflage des zweiten Bandes mit

Mk. 6.— in Zahlung genommen.

In gleicher Weise wir demnächst auch die neue 12. Auflage der Integralrechnung in zwei Bände zerlegt werden.

Im Mai 1920.

Helwingsche Verlagsbuchhandlung
in Hannover.

Inhalts-Verzeichnis.

Zweiter Teil.

Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra.

XIII. Abschnitt.

Theorie der komplexen Größen.

XIV. Abschnitt.

Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$.

XV. Abschnitt.

Numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten.

XIX. Abschnitt.

Anwendungen auf die analytische Geometrie des Raumes.

XX. Abschnitt.

Anwendungen auf die analytische Geometrie der Ebene.

XXI. Abschnitt.

Herleitung der *Taylor*schen Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Homogene Funktionen.

XXII. Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Zweiter Teil.

Einige grundlegende Untersuchungen aus der Algebra.

XIII. Abschnitt.

Theorie der komplexen Größen.

§ 103.

Erklärung der komplexen Größen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 165 bis 178.)

Bekanntlich führt schon die Auflösung der quadratischen Gleichungen häufig auf *imaginäre* Wurzeln. Ist z. B.

$$x^2 + 6x + 13 = 0,$$

so wird

$$x = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i,$$

wobei $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnet worden ist. Aus $\sqrt{-1} = i$ folgt

(1.) $\quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = +1, \quad i^5 = +i, \ldots.$

Es ist nicht nur von *großem* Vorteil, imaginäre Größen in die Rechnung einzuführen, sondern es stellt sich sogar bei vielen Untersuchungen die *Notwendigkeit* heraus, mit solchen Größen zu rechnen. Da die Bezeichnung *„imaginär“* leicht die falsche Vorstellung erwecken könnte, daß die Rechnung mit *imaginären* Größen unzulässig sei, nennt man die Größen von der Form

$$a + b\sqrt{-1}, \quad \text{oder} \quad a + bi$$

zum Unterschiede von den *reellen* Größen *„komplexe* Größen“;

dabei sind a und b *reelle* Größen. Ist $b = 0$, so reduziert sich $a + bi$ auf a und ist eine *reelle* Größe; ist $a = 0$, so reduziert $a + bi$ auf bi und heißt dann eine *„imaginäre“* oder auch *„rein imaginäre* Größe“. Hier ist also das Wort *„imaginär“* noch beibehalten.

Dem entsprechend nennt man a „den *reellen Teil*“ und b „den *Faktor des imaginären Teils*“ der komplexen Größe $a + bi$.

Wie die *reellen* Größen aus den *beiden* Einheiten $+1$ und -1 gebildet sind, so werden die *komplexen* Größen aus den vier Einheiten

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i$$

gebildet. Auf die so erklärten Größen kann man ohne weiteres die Regeln der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, wie sie für *reelle* Größen gelten, anwenden. Das Resultat dieser Operationen ist, wie sogleich gezeigt werden soll, wieder eine Größe von der Form $A + Bi$. Daraus folgt dann die *Berechtigung*, mit *komplexen* Größen ebenso zu rechnen wie mit *reellen*.

I. Addition. *Komplexe Größen werden addiert, indem man die reellen Teile zu den reellen und die Faktoren der imaginären Teile zu den Faktoren der imaginären Teile addiert*, also

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \tag{2.}$$

Das Resultat hat wieder die Form $A + Bi$,

II. Subtraktion. *Zwei komplexe Größen werden voneinander subtrahiert, indem man die reellen Teile und die Faktoren der imaginären Teile voneinander subtrahiert*, also

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i. \tag{3.}$$

Das Resultat hat wieder die Form $A + Bi$.

III. Multiplikation. *Zwei komplexe Größen werden miteinander multipliziert, indem jeden Teil des einen Faktors mit jedem Teile des anderen Faktors multipliziert*, also

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned} \tag{4.}$$

Auch hier hat das Resultat die Form $A + Bi$.

In dem besonderen Falle, wo $c = a$, $d = -b$ ist, erhält man

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2. \tag{5.}$$

Hier ist das Resultat sogar eine *positive reelle* Größe.

Zwei solche komplexe Größen, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Teiles voneinander unterscheiden, heißen *„konjugiert"*; es gelten für sie die folgenden Sätze:

1) *Die Summe zweier konjugiert komplexen Größen ist reell:*

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a. \tag{6.}$$

2) *Die Differenz zweier konjugiert komplexen Größen ist rein imaginär:*

$$(a + bi) - (a - bi) = 2bi. \tag{7.}$$

3) *Das Produkt zweier konjugiert komplexen Größen ist reell und positiv:*

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Dieses Produkt heißt nach *Gauß* „die *Norm von* $a + bi$" und ebenso „die *Norm von* $a - bi$". Um die Norm einer komplexen Größe zu bezeichnen, setzt man ein N vor dieselbe; es ist also

$$N(a + bi) = N(a - bi) = a^2 + b^2. \tag{8.}$$

Die Quadratwurzel aus der Norm, mit positivem Vorzeichen genommen, heißt „der *Modul*" oder (nach *Weierstraß*) „der *absolute Betrag*" der komplexen Größe. Das Zeichen dafür ist ein vorgesetztes M, oder es besteht aus zwei senkrechten Strichen, von denen die komplexe Größe eingeschlossen wird, also

$$\begin{cases} M(a + bi) = |a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}, \\ M(a - bi) = |a - bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases} \tag{9.}$$

Aus der Gleichung

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \tag{10.}$$

folgt der Satz:

4) *Der reziproke Wert einer komplexen Größe ist gleich ihrer konjugierten, dividiert durch die Norm.*

IV. Division. Bei der Division komplexer Größen multipliziert man Zähler und Nenner mit der zum Nenner konjugierten Größe, dann hat man nur noch durch eine *reelle* Größe, nämlich nur durch die *Norm* des Nenners zu dividieren. Dies gibt

$$\frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + \frac{ad-bc}{a^2+b^2}i. \tag{11.}$$

Auch hier hat das Resultat die Form $A + Bi$.

Von der Richtigkeit des gefundenen Resultates kann man sich dadurch überzeugen, daß man den Quotienten mit dem Divisor $a + bi$ multipliziert. Dadurch erhält man

$$\frac{(ac+bd)a}{a^2+b^2} + \frac{(ad-bc)a}{a^2+b^2}i + \frac{(ac+bd)b}{a^2+b^2}i + \frac{(ad-bc)b}{a^2+b^2}i^2$$

$$= \frac{a^2c+abd-abd+b^2c}{a^2+b^2} + \frac{a^2d-abc+abc+b^2d}{a^2+b^2}i = c+di;$$

das ist aber der Dividendus.

Da eine *Potenz mit positivem, ganzzahligen Exponenten* ein Produkt ist, so kann man auch eine komplexe Größe potenzieren; und zwar findet man

$$(a+bi)^n = \left[a^n - \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 - + \cdots\right] + \left[\binom{n}{1}a^{n-1}b - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + - \cdots\right]i. \tag{12.}$$

§ 104.

Einige Sätze über komplexe Größen. *Moivre*sche Formeln.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 174 bis 179.)

Da eine rein imaginäre Größe die Quadratwurzel aus einer *negativen* Zahl ist, so kann eine *reelle* Größe, welche von 0 verschieden ist, niemals einer *rein imaginären* Größe gleich sein. Die Gleichung

$$a + bi = 0 \tag{1.}$$

soll deshalb die Bedeutung haben, daß a und b *einzeln* gleich Null sind. Aus dieser Festsetzung ergibt sich

Satz 1. *Sind zwei komplexe Größen einander gleich, so müssen die reellen Teile und ebenso auch die Faktoren der imaginären Teile einander gleich sein.*

Beweis. Aus

$$a + bi = c + di \tag{2.}$$

folgt

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i = 0. \tag{3.}$$

Dies gibt aber

$$a - c = 0, \quad b - d = 0, \quad \text{oder} \quad a = c, \quad b = d. \tag{4.}$$

Jede Gleichung zwischen komplexen Größen umfaßt daher *zwei* Gleichungen zwischen reellen Größen.

Die komplexen Größen lassen sich auch noch in einer anderen Form darstellen. Setzt man nämlich

$$|a + bi| = +\sqrt{a^2 + b^2} = r, \tag{5.}$$

so wird $r \geqq a$ und $r \geqq b$, folglich kann man zwischen 0 und 2π (bezw. zwischen 0^0 und 360^0) einen Winkel φ so bestimmen, daß

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} \tag{6.}$$

wird. Aus $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ folgt nämlich $\sin\varphi = \pm\frac{b}{r}$; dann wird aber stets das obere Zeichen gelten, wenn man festsetzt, daß der Winkel φ

zwischen 0^0 und 90^0 liegen soll für $a > 0,\ b > 0$,
„ 90^0 „ 180^0 „ „ „ $a < 0,\ b > 0$,
„ 180^0 „ 270^0 „ „ „ $a < 0,\ b < 0$,
„ 270^0 „ 360^0 „ „ „ $a > 0,\ b < 0$.

Dieser Winkel φ heißt das *Argument* der komplexen Größe $a + bi$. Durch Einführung dieser Bezeichnungen wird

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{7.}$$

Bekanntlich kann man den Winkel φ um ein beliebiges Vielfache von 360^0 vermehren oder vermindern, ohne

daß sich die Werte von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ändern. Versteht man unter dem Argumente φ nicht den Winkel, sondern den zugehörigen Bogen, und bezeichnet man mit h eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl, so wird also

$$\cos(\varphi + 2h\pi) = \cos\varphi, \quad \sin(\varphi + 2h\pi) = \sin\varphi.$$

Deshalb geht Gleichung (7.) über in

$$a + bi = r[\cos(\varphi + 2h\pi) + i\sin(\varphi + 2h\pi)]. \tag{7a.}$$

Multipliziert man jetzt die komplexen Größen

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{und} \quad r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

miteinander, so erhält man

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \tag{8.}$$

Diese nach *Moivre* genannte Formel gibt

Satz 2. *Komplexe Größen werden miteinander multipliziert, indem man ihre absoluten Beträge miteinander multipliziert und ihre Argumente addiert.*

Dieser Satz läßt sich ohne weiteres auf Produkte von drei oder mehr Faktoren übertragen; es ist also

$$\begin{aligned} &r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\,.\,r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3) \\ &= r_1r_2r_3[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)]. \end{aligned} \tag{9.}$$

Sind die Faktoren alle einander gleich, so erhält man

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)] \tag{10.}$$

und damit zunächst für positive, ganzzahlige Exponenten

Satz 3. *Eine komplexe Größe wird potenziert, indem man den absoluten Betrag potenziert und das Argument mit dem Potenzexponenten multipliziert.*

Für $r = 1$ geht die Gleichung (10.) über in

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n =$$

$$\left[\cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots\right]$$

$$+ i\left[\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots\right].$$

Dies gibt mit Rücksicht auf Satz 1

(11.) $$\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots,$$

(12.) $$\sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots.$$

Durch diese Formeln, in denen das *Multiplikationstheorem* der trigonometrischen Funktionen ausgesprochen ist, lassen sich $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$ als rationale Funktionen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ darstellen.

Es wird z. B. für $n = 5$, wenn man noch die Relation $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ anwendet,

$$\cos(5\varphi) = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$$
$$= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi,$$
$$\sin(5\varphi) = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$
$$= 16\sin^5\varphi - 20\sin^3\varphi + 5\sin\varphi.$$

Für die Division zweier komplexen Größen erhält man jetzt

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2},$$

oder

(13.) $$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Daraus folgt

Satz 4. *Komplexe Größen werden durcheinander dividiert, indem man die absoluten Beträge durcheinander dividiert und die Argumente voneinander subtrahiert.*

Satz 3 macht es jetzt auch möglich, aus einer komplexen Größe die n^{te} Wurzel auszuziehen. Unter $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ versteht man nämlich eine Größe A, deren n^{te} Potenz gleich $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist. Diese Eigenschaft besitzt für ganzzahlige Werte von h die komplexe Größe

(14.) $$A = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right],$$

denn es wird nach Gleichung (10.)

$$A^n = r[\cos(\varphi + 2h\pi) + i\sin(\varphi + 2h\pi)],$$

oder, weil

$$\cos(\varphi + 2h\pi) = \cos\varphi \quad \text{und} \quad \sin(\varphi + 2h\pi) = \sin\varphi$$

ist

$$(15.) \qquad A^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Dies gibt

$$(16.) \quad \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right].$$

Dieser Ausdruck hat wieder die Form $A + Bi$.

Damit ist bewiesen:

Satz 5. *Aus einer komplexen Größe wird die Wurzel gezogen, indem man sie aus dem absoluten Betrage zieht und das Argument durch den Wurzel-Exponenten dividiert.*

Gleichzeitig sind hiermit auch die Potenzen, deren Exponent eine gebrochene Zahl ist, ebenso für *komplexe* Größen erklärt wie für *reelle,* indem man

$$(17.) \qquad A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p} = (\sqrt[q]{A})^p$$

findet.

Da in Gleichung (16.) die ganze Zahl h unendlich viele Werte hat, so könnte man glauben, es gäbe unendlich viele Werte für die n^{te} Wurzel aus $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dies ist aber nicht der Fall; setzt man nämlich

$$h = n + h',$$

so wird

$$\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{\varphi + 2h'\pi}{n}\right),$$

d. h. die Zahlen h und h' liefern denselben Wert der Wurzel, wenn ihre Differenz gleich n, oder gleich einem Vielfachen von n ist. Es gibt daher im ganzen nur n verschiedene Werte für die n^{te} Wurzel aus einer komplexen Größe. Diese n verschiedenen Werte findet man aus Gleichung (16.), indem man der ganzen Zahl h z. B. die Werte $0, 1, 2, \ldots n - 1$ beilegt.

Da unter den *komplexen* Größen die *reellen* Größen mit inbegriffen sind, so gelten diese Ausführungen auch für die Wurzeln aus reellen Größen. So ist z. B.

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\left(\frac{2h\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2h\pi}{n}\right),$$

ein Ausdruck, aus dem man die n verschiedenen Werte von $\sqrt[n]{1}$ findet, indem man

$$h = 0, 1, 2, \ldots n - 1$$

setzt.

§ 105.

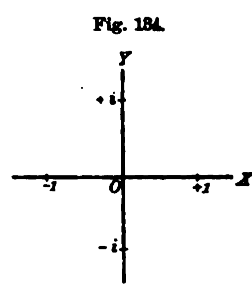
Geometrische Darstellung der komplexen Größen.

Wie man die *reellen* Größen durch Punkte oder Strecken in einer *geraden Linie* geometrisch darstellen kann, so kann man die *komplexen* Größen durch Punkte oder Strecken in einer *Ebene* darstellen. Dabei soll der folgende Grundsatz gelten:

Zwei Strecken sind einander gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben.

Dann bezeichne man mit $+1$ eine Strecke, deren Länge gleich 1 ist, und deren Richtung parallel ist zur positiven Richtung der X-Achse. Mit $+i$ dagegen bezeichne man eine Strecke, deren Länge auch gleich 1 ist, deren Richtung aber parallel ist zur positiven Richtung der Y-Achse. (Vgl. Fig. 134.)

Fig. 134.



Damit ist natürlich noch nicht gesagt, daß $+i$ dieselbe Bedeutung habe wie in den vorhergehenden Paragraphen, daß nämlich i gleich $\sqrt{-1}$ sei; es sollen vielmehr die hier folgenden Untersuchungen zunächst ganz unabhängig von den vorhergehenden geführt werden. Demnach werde hier die komplexe Größe $a + bi$ durch eine Strecke OP erklärt, welche den Anfangspunkt der Koordinaten O und einen Punkt P mit den Koordinaten

$OQ = a$, $QP = b$ verbindet. (Vgl. Fig. 135.) Man gelangt nämlich vom Punkte O aus zum Punkte P, indem man a Einheiten in der Richtung der X-Achse und dann b Einheiten in der Richtung der Y-Achse durchläuft, oder indem man zuerst b Einheiten in der Richtung der Y-Achse und dann a Einheiten in der Richtung der X-Achse durchläuft.

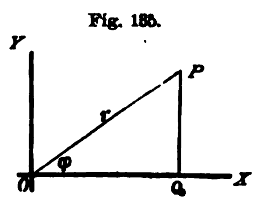


Fig. 135.

So entspricht jeder komplexen Größe $a + bi$ ein Punkt P in der Ebene und jedem Punkte P eine komplexe Größe $a + bi$.

Durch die Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}, \\ a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{cases}$$

kann man auch Polarkoordinaten einführen. Dabei heißt r der „*absolute Betrag* der Strecke OP", weil ihre absolute Länge gleich r ist, und der Winkel φ heißt das „*Argument* der komplexen Größe".

Die so erklärten komplexen Größen kann man nun durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division miteinander verbinden, indem man dieselben Regeln anwendet, welche für reelle Größen gebräuchlich sind, und zwar geschieht das in folgender Weise:

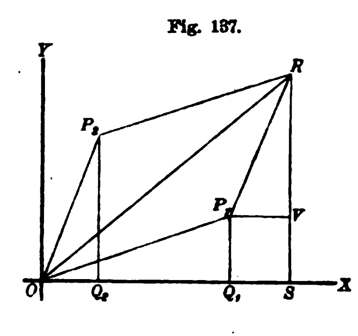
I. Addition. Will man die Addition zweier *reellen* Größen geometrisch ausführen, so trägt man auf einer Geraden, z. B. auf der X-Achse vom Anfangspunkte O aus eine Strecke OP ab, welche der einen Größe entspricht, und darauf vom Punkte P aus eine zweite Strecke PR, welche der anderen Größe entspricht. Dadurch erhält man eine Strecke OR, welche die Summe der beiden gegebenen Größen geometrisch darstellt. In welcher Reihenfolge man die beiden Strecken aufeinander folgen läßt, ist dabei gleichgültig. (Vgl. Fig. 136.)

Fig. 136.

O P R

Dasselbe Verfahren war vorhin schon für die Addition der Strecken a und bi angewendet worden; und genau ebenso kann man auch zwei komplexe Größen $a_1 + b_1 i$ und $a_2 + b_2 i$, welche durch die Strecken OP_1 und OP_2 geometrisch dargestellt sind, addieren. (Vgl. Fig. 137.) Man macht zu diesem Zwecke den Punkt P_1 zum Anfangspunkte einer Strecke P_1R, welche der Strecke OP_2 *gleich* ist, d. h. welche mit OP_2 gleiche Länge und gleiche Richtung hat. Dadurch erhält man ein Parallelogramm OP_1RP_2, in welchem der Punkt R, bezw. die Diagonale OR die Summe der beiden gegebenen Strecken OP_1 und OP_2 ist.

Fig. 137.



Da die Seite P_2R der Seite OP_1 gleich und parallel ist, so hätte man auch P_2 zum Anfangspunkte einer Strecke P_2R machen können, welche der Strecke OP_1 gleich ist, und wäre zu demselben Punkte R gekommen.

Wie man sehr leicht aus Figur 137 nachweisen kann, sind dabei die Koordinaten des Punktes R gleich $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$, so daß er in der Tat der komplexen Größe

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{2.}$$

entspricht.

In dieser Konstruktion ist der Satz vom *Parallelogramm der Kräfte* enthalten. Stellen nämlich die Strecken OP_1 und OP_2 durch ihre Länge und Richtung die Intensität und Richtung zweier Kräfte mit demselben Angriffspunkte O dar, so haben dieselben mit der Diagonale OR des Parallelogramms OP_1RP_2 gleiche Wirkung. Dabei sind

a_1 und b_1	die Komponenten von	OP_1,
a_2 „ b_2	„ „	„	OP_2,
$a_1 + a_2$ „ $b_1 + b_2$	„ „	„	OR.

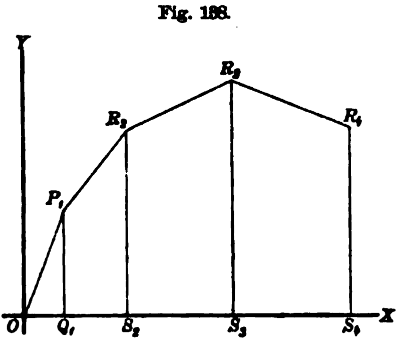
Die Komponenten der resultierenden Kraft findet man also, indem man die Einzelkräfte in ihre Komponenten zerlegt und die gleichgerichteten Komponenten addiert.

Man kann die Sätze über Addition ausdehnen auf Summen von beliebig vielen Summanden. Soll man z. B. die Strecken

$$a_1 + b_1 i, \quad a_2 + b_2 i, \ldots a_n + b_n i$$

addieren, so erhält man für die Summe der beiden ersten Strecken einen Punkt R_2 mit den Koordinaten $a_1 + a_2$ und $b_1 + b_2$, für die Summe der drei ersten Strecken einen Punkt R_3 mit den Koordinaten $a_1 + a_2 + a_3$ und $b_1 + b_2 + b_3$; in dieser Weise kann man fortfahren, bis man einen Punkt R_n mit den Koordinaten $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ und $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ erhält, welcher der Summe entspricht (Fig. 138).

Fig. 138.



Ist das Polygon $OP_1R_2R_3 \ldots R_n$ geschlossen, so daß der letzte Punkt R_n mit dem Anfangspunkte O zusammenfällt, so ist die Summe gleich Null; die Bedingung für einen geschlossenen Streckenzug ist daher

$$\Sigma(a + bi) = 0, \tag{3.}$$

welche die beiden Bedingungen

$$\Sigma a = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma b = 0$$

in sich einschließt.

Diese Regeln für die Addition von Strecken spielen eine wichtige Rolle in der *Vektor-Algebra.*

II. Subtraktion. Da eine Größe von der anderen subtrahiert wird, indem man die entgegengesetzte Größe addiert, so kann man die Subtraktion auf die Addition zurückführen und findet

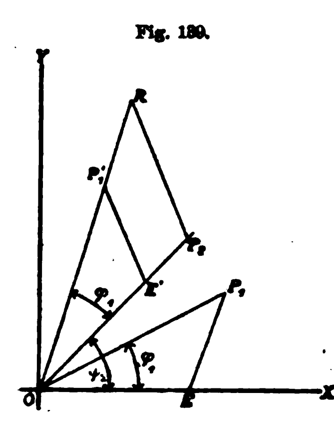
$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i) \\ &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.\end{aligned} \tag{4.}$$

III. Multiplikation. Für reelle Größen gilt die Regel: *Das Produkt $A \cdot B$ entsteht aus B wie A aus der Einheit.* Dieselbe Regel kann man auch bei der Multiplikation zweier

komplexen Größen $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, welche den Strecken OP_1 und OP_2 entsprechen, aufstellen.

Hat der Punkt E (Fig. 139) die Koordinaten $a = 1$ und $b = 0$, so entsteht die Strecke OP_1 aus der Einheit OE, indem man durch O eine Gerade legt, welche mit OE den Winkel φ_1 bildet, und auf dieser Geraden die Länge der Einheit (OE) r_1-mal abträgt. Ebenso findet man das Produkt der beiden Strecken OP_1 und OP_2, indem man durch den Anfangspunkt O eine Gerade legt, welche mit der Geraden OP_2 den Winkel φ_1 bildet, und auf dieser Geraden die Länge von OP_2 (also r_2) r_1-mal abträgt. Dadurch erhält man einen Punkt R, welcher dem Produkte der beiden komplexen Größen entspricht.

Fig. 139.



Durch den Umstand, daß die beiden Dreiecke OEP_1 und OP_2R einander ähnlich sind, wird auch die Konstruktion des Punktes R verhältnismäßig einfach. Man mache zu diesem Zwecke das Dreieck $OE'P'_1$ dem Dreieck OEP_1 kongruent und ziehe P_2R parallel zu $E'P'_1$. Dabei hat die Strecke OR nach Konstruktion die Länge r_1r_2 und bildet mit der positiven Richtung der X-Achse den Winkel $\varphi_1 + \varphi_2$, so daß man erhält

$$(5.)\quad r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,.\,r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Es gilt also auch hier der Satz: *Komplexe Größen werden miteinander multipliziert, indem man die absoluten Beträge miteinander multipliziert und die Argumente addiert.*

In dem besonderen Falle, wo

$$r_1 = 1,\quad r_2 = 1,\quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2},\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

ist, geht Gleichung (5.) über in

$$(6.)\qquad i^2 = -1.$$

Damit ist bewiesen, daß *die komplexen Größen, welche in diesem Paragraphen geometrisch erklärt wurden, mit den früher betrachteten identisch sind.*

IV. Division. Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, so liegt in der eben angegebenen Konstruktion auch die Anleitung zur Division komplexer Größen. Soll man nämlich die den Strecken OR und OP_1 entsprechenden komplexen Größen durcheinander dividieren, so macht man wieder das Dreieck OP_2R (Fig. 139) ähnlich dem Dreieck OEP_1, so daß P_2 und E homologe Punkte sind. Die Strecke OP_2 entspricht dann dem gesuchten Quotienten, und es gilt der Satz: *Komplexe Größen werden durcheinander dividiert, indem man die absoluten Beträge durcheinander dividiert und die Argumente voneinander subtrahiert.*

§ 106.

Vier Sätze über die absoluten Beträge.

Satz 1. *Der absolute Betrag der Summe zweier komplexen Größen ist (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge und (gleich oder) größer als die Differenz derselben.*

Beweis. Die Summe der beiden komplexen Größen $r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ und $r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ ist

$$(r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2) + i(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2);$$

der absolute Betrag dieser Summe wird daher

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Setzt man voraus, daß $r_1 > r_2$ ist, so erhält dieser Ausdruck seinen *größten* Wert, nämlich den Wert $r_1 + r_2$, wenn $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$ wird; den *kleinsten* Wert dagegen, nämlich den Wert $r_1 - r_2$, erhält er, wenn $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$ wird. Deshalb ist

$$(1.)\quad r_1 - r_2 \leqq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \leqq r_1 + r_2.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Viel einfacher gestaltet sich der Beweis mit Hilfe der geometrischen Darstellung; denn da ist dieser Satz identisch

mit dem Satze: *In einem Dreiecke OP_1R* (Fig. 137) *ist die Seite OR kleiner als die Summe und größer als die Differenz der beiden anderen Seiten OP_1 und P_1R.*

Satz 2. *Der absolute Betrag der Differenz zweier komplexen Größen ist (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge und (gleich oder) größer als die Differenz derselben.*

Beweis. Man kann die Differenz auch als eine Summe auffassen, indem man die Größe, welche subtrahiert werden soll, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen, addiert. Deshalb folgt dieser Satz schon aus dem vorhergehenden Satze.

Man kann somit Satz 1 auch ohne weiteres ausdehnen auf die algebraische Summe beliebig vieler Größen.

Satz 3. *Der absolute Betrag des Produktes zweier komplexen Größen ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge.*

Der Beweis des Satzes folgt aus der Gleichung

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \, . \, r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{2.}$$

Satz 4. *Der absolute Betrag des Quotienten zweier komplexen Größen ist gleich dem Quotienten der absoluten Beträge.*

Auch hier folgt der Beweis unmittelbar aus der Gleichung

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

§ 107.

Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 118 und 119.)

Erklärung. *Eine unendliche Reihe*

$$(a_0 + b_0i) + (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) + \cdots,$$

bei der die einzelnen Glieder komplexe Größen sind, heißt konvergent, wenn die reellen Teile und die Faktoren der imaginären Teile für sich zwei konvergente Reihen bilden, wenn also die Reihen

$$\begin{cases} A = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots, \\ B = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots \end{cases} \tag{1.}$$

konvergent sind; und zwar heißt sie „*unbedingt konvergent*", wenn A und B *unbedingt konvergente* Reihen sind. Ihre *Summe* wird sich dann derselben Grenze

$$S = A + Bi \tag{2.}$$

nähern, wie man auch die Glieder der Reihe anordnen mag.

Satz 1. *Eine Reihe (mit reellen oder komplexen Gliedern) ist unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge ihrer einzelnen Glieder konvergiert.*

Beweis. Ist

$$r_0 = |a_0 + b_0 i|, \quad r_1 = |a_1 + b_1 i|, \quad r_2 = |a_2 + b_2 i| \cdots, \tag{3.}$$

so konvergiert nach Voraussetzung die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots.$$

Nun ist aber

$$r_0 \geqq |a_0|, \quad r_1 \geqq |a_1|, \quad r_2 \geqq |a_2|, \ldots,$$
$$r_0 \geqq |b_0|, \quad r_1 \geqq |b_1|, \quad r_2 \geqq |b_2|, \ldots,$$

folglich sind die Reihen

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots,$$
$$|b_0| + |b_1| + |b_2| + \cdots$$

erst recht konvergent, d. h. die Reihen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \quad \text{und} \quad b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$$

sind nach Formel Nr. 118 der Tabelle *unbedingt konvergent.* Deshalb gilt auch dasselbe für die Reihe

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \cdots.$$

Der Wortlaut dieses Satzes stimmt genau überein mit dem letzten Satze in § 55 (S. 269, vgl. auch Formel Nr. 118 der Tabelle); dort handelte es sich aber nur um Reihen mit positiven und negativen *reellen* Gliedern, während hier die einzelnen Glieder *komplexe* Größen sind.

Umkehrung. *Ist eine Reihe mit komplexen Gliedern unbedingt konvergent, so konvergiert auch die Summe der absoluten Beträge.*

Beweis. Unter Benutzung derselben Bezeichnung wie in Satz 1 konvergieren nach Voraussetzung die beiden Reihen

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots$$

und

$$|b_0| + |b_1| + |b_2| + \cdots;$$

deshalb konvergiert auch die Reihe

$$(|a_0| + |b_0|) + (|a_1| + |b_1|) + (|a_2| + |b_2|) + \cdots,$$

die nur positive Glieder enthält. Nach Satz 1 in § 106 ist aber der absolute Betrag einer Summe (gleich oder) kleiner als die Summe der absoluten Beträge, es ist also

$$r_0 = |a_0 + b_0 i| \leqq |a_0| + |b_0|,$$
$$r_1 = |a_1 + b_1 i| \leqq |a_1| + |b_1|,$$
$$r_2 = |a_2 + b_2 i| \leqq |a_2| + |b_2|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folglich ist die Reihe

$$r_0 + r_1 + r_2 + \cdots$$

erst recht konvergent.

Auch die Sätze, welche in § 56 für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zweier *unbedingt konvergenten* Reihen und über die Wurzelausziehung aus Reihen mit *reellen* Gliedern bewiesen wurden, lassen sich jetzt auf Reihen mit *komplexen* Gliedern übertragen. Dadurch erhält man die folgenden Sätze:

Satz 2. *Sind*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ und } V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{4.}$$

zwei (bedingt oder unbedingt) konvergente Reihen, so werden diese Reihen addiert, indem man die gleichstelligen Glieder addiert; es wird also

$$U + V = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \cdots. \tag{5.}$$

Ebenso findet man für die Subtraktion der beiden konvergenten Reihen

$$U - V = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \cdots. \tag{6.}$$

In derselben Weise kann man auch die algebraische Summe von drei oder mehr konvergenten Reihen mit komplexen Gliedern bilden.

Satz 3. *Sind*

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \text{ und } V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{7.}$$

zwei unbedingt konvergente Reihen (deren Glieder jetzt auch komplex sein dürfen), *und ist*

$$w_0 = u_0 v_0,$$
$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0,$$
$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,$$

so ist auch die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

unbedingt konvergent, und ihre Summe W ist gleich dem Produkte UV der Summen der beiden ersten Reihen.

Beweis. Nach Voraussetzung sind die Reihen

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots \quad \text{und} \quad |v_0| + |v_1| + |v_2| + \cdots$$

konvergent. Bezeichnet man ihre Summen bezw. mit U' und V', und mit W' die Reihe, welche durch Multiplikation der beiden Reihen U' und V' entsteht, so kann man in diesen drei Reihen die Summen U'_n, V'_n, W'_n der n ersten Glieder absondern und findet ebenso wie in § 56, daß

$$U'_n V'_n - W'_n = |u_{n-1}| \cdot |v_{n-1}| + (|u_{n-2}| \cdot |v_{n-1}| + |u_{n-1}| \cdot |v_{n-2}|) + \cdots$$
$$+ (|u_1| \cdot |v_{n-1}| + |u_2| \cdot |v_{n-2}| + \cdots + |u_{n-2}| \cdot |v_2| + |u_{n-1}| \cdot |v_1|)$$
$$= |u_{n-1} v_{n-1}| + (|u_{n-2} v_{n-1}| + |u_{n-1} v_{n-2}|) + \cdots$$

für hinreichend große Werte von n beliebig klein wird; folglich wird nach den Sätzen des vorhergehenden Paragraphen der absolute Betrag von

$$U_n V_n - W_n = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-2} v_{n-1} + u_{n-1} v_{n-2}) + \cdots$$
$$+ (u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-2} v_2 + u_{n-1} v_1)$$

erst recht beliebig klein, denn der absolute Betrag einer Summe ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge. Es wird daher

$$\lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} U_n V_n = UV. \tag{8.}$$

Dabei ist auch $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ *unbedingt konvergent;* denn ersetzt man die Größen $u_0, u_1, u_2, \ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots$ durch ihre absoluten Beträge, so verwandeln sich die Größen $w_0, w_1, w_2, \ldots$ in $w'_0, w'_1, w'_2, \ldots$, und es wird

$$|w_0| = w'_0, \quad |w_1| \leqq w'_1, \quad |w_2| \leqq w'_2, \ldots.$$

Jetzt ist die Reihe $w'_0 + w'_1 + w'_2 + \cdots$ konvergent, folglich ist die Reihe

$$|w_0| + |w_1| + |w_2| + \cdots$$

erst recht konvergent.

Daraus ergibt sich dann auch ohne weiteres, wie man das Produkt von drei oder mehr *unbedingt konvergenten* Reihen bilden kann.

Macht man die Faktoren eines solchen Produktes sämtlich einander gleich, so erhält man die *Potenz* einer Reihe. Ist z. B. wieder

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \tag{9.}$$

eine unbedingt konvergente Reihe, so wird auch

$$U^m = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \tag{10.}$$

eine unbedingt konvergente Reihe. Für die Bildung der einzelnen Glieder $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ gilt auch hier die in § 56 bewiesene Rekursionsformel

$$\begin{aligned} nu_0A_n &+ [n-(m+1)]u_1A_{n-1} + [n-2(m+1)]u_2A_{n-2} \\ &+ [n-3(m+1)]u_3A_{n-3} + \cdots + [n-(n-1)(m+1)]u_{n-1}A_1 \\ &+ [n-n(m+1)]u_nA_0 = 0. \end{aligned} \tag{11.}$$

Aus der *Multiplikation* ergibt sich durch Umkehrung auch die *Division*, und aus der *Potenzierung* ergibt sich durch Umkehrung die *Wurzelausziehung*. Dabei gelten auch hier dieselben Beziehungen und Gleichungen wie die in § 56 für Reihen mit *reellen* Gliedern aufgeführten. Bei der Übertragung der Wurzelausziehung auf Reihen mit komplexen Gliedern ist nur noch zu beachten, daß die Größe

$$u_0 = \sqrt[m]{A_0} \tag{12.}$$

nach Formel Nr. 179 der Tabelle m verschiedene Werte besitzt.

§ 108.

Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 180.)

Da man die Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bei komplexen Größen in der-

selben Weise ausführen kann wie bei reellen, so kann man auch ganze und gebrochene rationale Funktionen von einer komplexen Veränderlichen

$$z = x + yi \tag{1.}$$

bilden. Eine solche Funktion kann immer auf die Form

$$f(z) = f(x + yi) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = u + vi \tag{2.}$$

gebracht werden, wenn man die Operationen, welche durch die Bildung der Funktion gefordert werden, wirklich ausführt. Dabei sind $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ wieder *rationale* Funktionen der beiden Veränderlichen x und y, die nur reelle Größen enthalten.

Auch *irrationale* Funktionen von $x + yi$ kann man bilden, da es möglich ist, bei jeder komplexen Größe n Werte der Wurzel n^{ten} Grades anzugeben. Außerdem kann man noch *transzendente* Funktionen von $x + yi$ durch konvergente Reihen erklären. Beispiele hierzu bieten die Reihen

$$1 + \frac{x + yi}{1!} + \frac{(x + yi)^2}{2!} + \frac{(x + yi)^3}{3!} + \cdots,$$

$$\frac{x + yi}{1!} - \frac{(x + yi)^3}{3!} + \frac{(x + yi)^5}{5!} - + \cdots,$$

$$1 - \frac{(x + yi)^2}{2!} + \frac{(x + yi)^4}{4!} - + \cdots$$

usw., welche bezw. in e^x, $\sin x$, $\cos x$ übergehen, wenn y gleich 0 wird. Diese Reihen sind auch konvergent, weil die Summe der absoluten Beträge konvergiert. Auf die so gebildeten Funktionen lassen sich ohne weiteres alle Erklärungen und Sätze ausdehnen, welche in der Differential-Rechnung für Funktionen von einer *reellen* Veränderlichen gegeben worden sind. Namentlich kann man auch hier den Differentialquotienten, d. h. die Ableitung der Funktion wieder wie in Formel Nr. 16 der Tabelle durch die Gleichung

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dz} = \lim_{z_1 = z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}$$

erklären. Handelt es sich z. B. um die Bildung der Ableitung von z^n, so findet man in derselben Weise wie bei reellen Veränderlichen

$$\frac{d(z^n)}{dz} = \lim_{z_1=z} \frac{z_1{}^n - z^n}{z_1 - z} = \lim_{z_1=z}(z_1{}^{n-1} + z z_1{}^{n-2} + \cdots + z^{n-2}z_1 + z^{n-1})$$
$$= nz^{n-1},$$

wobei $z_1 = x_1 + y_1 i$ sich dem Werte $z = x + yi$ beliebig nähert, indem sich x_1 dem Werte x und y_1 dem Werte y beliebig nähern. Dabei ist

(3.) $$dz = dx + idy, \quad df(z) = d(u + vi) = du + idv,$$

so daß man es, abgesehen von dem Faktor i, auch hier nur mit den Differentialen *reeller* Größe zu tun hat.

Bemerkenswert sind hier aber noch die folgenden Formeln.

Man kann $f(z)$ als Funktion der beiden Veränderlichen x und y betrachten und erhält deshalb

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y},$$

oder

(4.) $$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = if'(z).$$

Dies gibt

(5.) $$\frac{\partial f(z)}{\partial x} + i\frac{\partial f(z)}{\partial y} = f'(z) - f'(z) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (2.)

(6.) $$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

also

(7.) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

§ 109.

Zusammenhang der Exponential-Funktion mit den trigonometrischen und den hyperbolischen Funktionen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 181 bis 193.)

Es sei eine Funktion $f(z)$ erklärt durch die Gleichung

(1.) $$f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

wobei z jetzt auch komplexe Werte $x + yi$ haben darf.

Multipliziert man diese Reihe mit

$$f(z_1) = 1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \frac{z_1^3}{3!} + \cdots, \tag{2.}$$

so erhält man

$$f(z) \cdot f(z_1) = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots, \tag{3.}$$

wobei nach Formel Nr. 119 der Tabelle

$$w_0 = 1, \quad w_1 = \frac{z}{1!} + \frac{z_1}{1!} = \frac{z + z_1}{1!},$$

$$w_2 = \frac{z^2}{2!} + \frac{z}{1!} \cdot \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} = \frac{z^2 + 2zz_1 + z_1^2}{2!} = \frac{(z + z_1)^2}{2!},$$

. . . .

$$w_n = \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{z_1}{1!} + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!} \cdot \frac{z_1^2}{2!} + \cdots$$

$$= \frac{1}{n!}\left[z^n + \frac{n}{1} z^{n-1} z_1 + \frac{n(n-1)}{2!} z^{n-2} z_1^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{(z + z_1)^n}{n!}$$

wird. Deshalb ist

$$f(z)f(z_1) = 1 + \frac{z+z_1}{1!} + \frac{(z+z_1)^2}{2!} + \frac{(z+z_1)^3}{3!} + \cdots = f(z+z_1). \tag{4.}$$

Beschränkt man z und z_1 auf *reelle* Werte, so wird

$$f(z) = e^z, \quad f(z_1) = e^{z_1}, \quad f(z + z_1) = e^{z+z_1},$$

und Gleichung (4.) gibt die bekannte Relation

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}. \tag{5.}$$

Man bezeichnet nun die durch Gleichung (1.) erklärte Funktion $f(z)$ auch dann noch mit e^z und nennt sie „*Exponential-Funktion*", wenn z beliebige *komplexe* Werte annimmt, obgleich dann z kein eigentlicher Exponent mehr ist. Es ist also bei dieser Erweiterung des Begriffes die Funktion e^z nicht mehr als eine *Potenz* aufzufassen, sondern als die Reihe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots.$$

Wie aber soeben gezeigt wurde, gilt auch dann noch die Gleichung (5.), in welcher das *Additionstheorem* der Exponential-Funktion ausgesprochen ist.

Um zu untersuchen, welchen Sinn e^z für komplexe Werte von z hat, setze man zunächst $x = 0$, also $z = yi$; dann wird

$$(6.)\quad e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + - \cdots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - + \cdots\right)$$
$$= \cos y + i \sin y.$$

Ebenso findet man für $z = -yi$

$$(7.)\quad e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$$

Daraus folgt

$$(8.)\quad \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$$

Setzt man jetzt $z = x + yi$, so wird nach Gleichung (6.)

$$(9.)\quad e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Aus diesen Beziehungen ergeben sich auch mit großer Leichtigkeit die *Moivre*schen Formeln (vgl. die Formel-Tabelle Nr. 175 bis 179).

Setzt man nämlich

$$e^{x_1} = r_1, \quad e^{x_2} = r_2, \quad \text{also} \quad e^{x_1+x_2} = r_1 r_2, \quad e^{x_1-x_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

so wird

$$e^{x_1+y_1 i} = r_1(\cos y_1 + i \sin y_1),$$
$$e^{x_2+y_2 i} = r_2(\cos y_2 + i \sin y_2);$$

deshalb folgt aus Gleichung (5.)

$$e^{x_1+y_1 i} \cdot e^{x_2+y_2 i} = e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i},$$

oder

$$(10.)\quad r_1(\cos y_1 + i \sin y_1) \cdot r_2(\cos y_2 + i \sin y_2) =$$
$$r_1 r_2[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)].$$

Dadurch wird Formel Nr. 175 der Tabelle bestätigt.

Ferner folgt aus Gleichung (5.)

$$e^{x+yi} \cdot e^{-x-yi} = e^0 = 1,$$

oder

$$(11.)\quad e^{-x-yi} = \frac{1}{e^{x+yi}} = \frac{1}{e^x}(\cos y - i \sin y);$$

deshalb wird

$$\frac{e^{x_1+y_1i}}{e^{x_2+y_2i}} = e^{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i}, \tag{12.}$$

oder

$$\frac{r_1(\cos y_1 + i\sin y_1)}{r_2(\cos y_2 + i\sin y_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(y_1 - y_2) + i\sin(y_1 - y_2)]. \tag{13.}$$

Dadurch wird Formel Nr. 178 der Tabelle bestätigt.

Durch wiederholte Anwendung des *Additionstheorems* ergibt sich das *Multiplikationstheorem* der Exponential-Funktion, das in der Gleichung

$$(e^{\varphi i})^n = e^{n\varphi i} \tag{14.}$$

ausgesprochen ist. Diese Gleichung enthält aber zugleich auch das *Multiplikationstheorem* der trigonometrischen Funktionen, denn sie kann auch in der Form

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

geschrieben werden und liefert dann die Formeln Nr. 177 der Tabelle, nämlich

$$\begin{cases} \cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi \\ \qquad + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots, \\ \sin(n\varphi) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots. \end{cases} \tag{15.}$$

Besonders zu beachten ist noch, daß aus Gleichung (6.) für $y = 2\pi, 4\pi, \ldots 2h\pi$

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{4\pi i} = 1, \ldots e^{2h\pi i} = 1 \tag{16.}$$

folgt, wenn h eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl ist. Ferner wird deshalb

$$e^{z+2h\pi i} = e^z \cdot e^{2h\pi i} = e^z. \tag{17.}$$

Die Exponential-Funktion hat also die Eigenschaft, daß sich ihr Wert gar nicht ändert, wenn man die Veränderliche z um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt. Man nennt deshalb $2\pi i$ eine „*Periode* der Exponential-Funktion" und e^z selbst eine „*periodische* Funktion". In ähnlicher Weise sind auch die trigonometrischen Funktionen periodische Funktionen, und zwar ist ihre Periode 2π; denn sie ändern

ihren Wert nicht, wenn man den Wert der Veränderlichen um ein Vielfaches von 2π vermehrt oder vermindert.

Aus den vorstehenden Formeln erkennt man auch den inneren Grund für die nahe Verwandtschaft zwischen den *trigonometrischen* und den *hyperbolischen* Funktionen. Den Gleichungen (6.), (7.) und (8.) entsprechen nämlich die Gleichungen

$$(6\text{a.})\quad e^u = \mathfrak{Cos}\,u + \mathfrak{Sin}\,u, \qquad (7\text{a.})\quad e^{-u} = \mathfrak{Cos}\,u - \mathfrak{Sin}\,u,$$

$$(8\text{a.})\qquad \mathfrak{Cos}\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \mathfrak{Sin}\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}.$$

Setzt man $u = \varphi i$, so erhält man aus diesen Gleichungen

$$(18.)\qquad \mathfrak{Cos}(\varphi i) = \frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} = \cos\varphi,$$

$$(19.)\qquad \mathfrak{Sin}(\varphi i) = \frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2} = i\sin\varphi.$$

Setzt man dagegen $y = \varphi i$, so findet man aus den Gleichungen (8.)

$$(20.)\qquad \cos(\varphi i) = \frac{e^{-\varphi} + e^{\varphi}}{2} = \mathfrak{Cos}\,\varphi,$$

$$(21.)\qquad \sin(\varphi i) = \frac{e^{-\varphi} - e^{\varphi}}{2i} = i\cdot\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = i\,\mathfrak{Sin}\,\varphi.$$

Daraus ergibt sich auch, wie man die Formeln für die hyperbolischen Funktionen aus den entsprechenden trigonometrischen Formeln ohne weiteres ableiten kann.

Versteht man unter h eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, so wird nach Gleichung (17.)

$$e^{z+2h\pi i} = e^z.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$(22.)\quad \mathfrak{Cos}(u + 2h\pi i) = \frac{1}{2}(e^{u+2h\pi i} + e^{-u-2h\pi i}) = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = \mathfrak{Cos}\,u.$$

$$(23.)\quad \mathfrak{Sin}(u + 2h\pi i) = \frac{1}{2}(e^{u+2h\pi i} - e^{-u-2h\pi i}) = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \mathfrak{Sin}\,u.$$

Die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Cos}\,u$ und $\mathfrak{Sin}\,u$ haben daher die Periode $2\pi i$.

Die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Tg}\, u$ und $\mathfrak{Ctg}\, u$ haben sogar die Periode πi, denn es wird

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

also

$$e^{z+\pi i} = e^z \,.\, e^{\pi i} = -e^z,$$

folglich wird

$$\mathfrak{Tg}(u + \pi i) = \tag{24.}$$

$$\frac{e^{u+\pi i} - e^{-u-\pi i}}{e^{u+\pi i} + e^{-u-\pi i}} = \frac{-e^u + e^{-u}}{-e^u - e^{-u}} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \mathfrak{Tg}\, u,$$

und ebenso ist

$$\mathfrak{Ctg}(u + \pi i) = \frac{1}{\mathfrak{Tg}(u + \pi i)} = \frac{1}{\mathfrak{Tg}\, u} = \mathfrak{Ctg}\, u. \tag{25.}$$

Setzt man der Kürze wegen

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi = s, \quad e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi = t, \tag{26.}$$

so wird

$$\begin{cases} s + t = 2\cos\varphi, \quad s - t = 2i\sin\varphi, \quad st = 1, \\ s^m + t^m = e^{m\varphi i} + e^{-m\varphi i} = 2\cos(m\varphi), \\ s^m - t^m = e^{m\varphi i} - e^{-m\varphi i} = 2i\sin(m\varphi). \end{cases} \tag{27.}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man dann

$$(s + t)^{2n} = s^{2n} + \binom{2n}{1} s^{2n-1}t + \binom{2n}{2} s^{2n-2}t^2 + \cdots$$
$$+ \binom{2n}{2} s^2 t^{2n-2} + \binom{2n}{1} s t^{2n-1} + t^{2n},$$

oder, wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung je zwei Glieder miteinander vereinigt, von denen das eine ebensoweit vom Anfange wie das andere vom Ende absteht,

$$(s + t)^{2n} = (s^{2n} + t^{2n}) + \binom{2n}{1} st(s^{2n-2} + t^{2n-2})$$
$$+ \binom{2n}{2} s^2t^2(s^{2n-4} + t^{2n-4}) + \cdots$$
$$+ \binom{2n}{n-1} s^{n-1}t^{n-1}(s^2 + t^2) + \binom{2n}{n} s^n t^n.$$

Dies gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen (26.) und (27.)

$$(28.)\quad 2^{2n}(\cos\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) + \binom{2n}{1}2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2}2\cos(2n-4)\varphi + \cdots + \binom{2n}{n-1}2\cos(2\varphi) + \binom{2n}{n}.$$

Ebenso findet man

$$(29.)\quad 2^{2n+1}(\cos\varphi)^{2n+1} = 2\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1}2\cos(2n-1)\varphi + \cdots + \binom{2n+1}{n-1}2\cos(3\varphi) + \binom{2n+1}{n}2\cos\varphi.$$

Bildet man jetzt in ähnlicher Weise

$$(s-t)^{2n} = (s^{2n}+t^{2n}) - \binom{2n}{1}st(s^{2n-2}+t^{2n-2}) + \binom{2n}{2}s^2t^2(s^{2n-4}+t^{2n-4}) + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}s^{n-1}t^{n-1}(s^2+t^2) + (-1)^n\binom{2n}{2}s^nt^n,$$

so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen (26.) und (27.)

$$(30.)\quad (-1)^n 2^{2n}(\sin\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) - \binom{2n}{1}2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2}2\cos(2n-4)\varphi - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}2\cos(2\varphi) + (-1)^n\binom{2n}{n}.$$

Dagegen wird

$$(s-t)^{2n+1} = (s^{2n+1}-t^{2n+1}) - \binom{2n+1}{1}st(s^{2n-1}-t^{2n-1}) + - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}s^{n-1}t^{n-1}(s^3-t^3) + (-1)^n\binom{2n+1}{n}s^nt^n(s-t).$$

Berücksichtigt man jetzt wieder die Gleichungen (26.) und (27.) und dividiert beide Seiten der Gleichung durch i, so erhält man

$$(31.)\qquad (-1)^n 2^{2n+1}(\sin\varphi)^{2n+1} =$$

$$2\sin(2n+1)\varphi - \binom{2n+1}{1}2\sin(2n-1)\varphi + - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1}2\sin(3\varphi) + (-1)^n\binom{2n+1}{n}2\sin\varphi.$$

Ähnliche Formeln lassen sich auch für die *hyperbolischen* Funktionen herleiten.

Bemerkungen.

1. Dem Anfänger wird dringend empfohlen, diese Formeln durch Zahlenbeispiele einzuüben, also die Ausdrücke für $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$, $\cos^3\varphi$, $\sin^3\varphi$, $\cos^4\varphi$, $\sin^4\varphi, \ldots$ wirklich zu bilden.

2. Die vorstehenden Formeln finden in der Integral-Rechnung eine wichtige Anwendung.

§ 110.

Logarithmen der komplexen Größen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 194 und 195.)

Nach Gleichung (9.) des vorhergehenden Paragraphen war

$$(1.)\qquad e^{x+yi} = e^x . e^{yi} = e^x(\cos y + i\sin y) = u + vi,$$

wo

$$(2.)\qquad u = e^x\cos y, \quad v = e^x\sin y$$

reelle Größen sind. Hierbei waren x und y ganz beliebige Größen. Man kann aber auch die Gleichung (1.) befriedigen, wenn die Größen u und v beliebig gegeben sind, denn aus den Gleichungen (2.) folgt dann

$$(3.)\qquad \begin{cases} e^{2x} = u^2 + v^2, & \text{oder} \quad x = \frac{1}{2}\ln(u^2+v^2), \\ \operatorname{tg} y = \frac{v}{u}, & \text{oder} \quad y = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right), \end{cases}$$

wobei man den Wert von y so bestimmen muß, daß

$$0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn} \quad u > 0,\ v > 0,$$

$$\frac{\pi}{2} < y < \pi, \quad \text{„} \quad u < 0,\ v > 0,$$

$$\pi < y < \frac{3\pi}{2}, \quad \text{„} \quad u < 0,\ v < 0,$$

$$\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi, \quad \text{„} \quad u > 0,\ v < 0$$

ist, damit die Gleichungen (2.) befriedigt werden.

Für *reelle* Größen war nun der natürliche Logarithmus einer Zahl a der Exponent, zu welchem die Basis e erhoben werden muß, damit man a erhält, d. h. aus der Gleichung

$$e^{\alpha} = a \quad \text{folgte} \quad \alpha = \ln a.$$

Man erkennt aus dem vorstehenden, daß man diese Erklärung jetzt ohne weiteres auf komplexe Größen ausdehnen kann, indem man aus Gleichung (1.) die Gleichung

(4.) $$x + yi = \ln(u + vi)$$

ableitet. Dabei tritt aber der äußerst bemerkenswerte Umstand ein, daß der Logarithmus von $u + vi$ *unendlich viele* Werte haben kann, denn nach Formel Nr. 185 der Tabelle wird für ganzzahlige Werte von h auch

(5.) $$e^{x+yi+2h\pi i} = u + vi.$$

Dies gibt

(6.) $$\ln(u + vi) = x + yi + 2h\pi i.$$

Liegt y zwischen $-\pi$ und $+\pi$, so nennt man $x + yi$ den „*Hauptwert* von $\ln(u + vi)$". Aus diesem gehen alle übrigen Werte von $\ln(u + vi)$ durch Addition eines ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ hervor.

Aus der Gleichung

(7.) $$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

folgt z. B.

(8.) $$\ln(-1) = \pi i + 2h\pi i = (2h + 1)\pi i.$$

§ 111.

Zusammenhang der Funktionen $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ und $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,x$.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 196 und 197.)

Nach Formel Nr. 102 der Tabelle ist für $-1 < x < +1$

$$(1.)\qquad \begin{cases} \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots, \\ \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - - \cdots, \end{cases}$$

also

$$(2.)\qquad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Damals war x eine *reelle* Größe; jetzt gelten aber die zur Herleitung dieser Reihenentwickelung notwendigen Voraussetzungen auch noch, wenn x eine *komplexe* Größe ist, deren absoluter Betrag kleiner als 1 bleibt. Setzt man z. B. $x = \varphi i$, wo φ eine reelle Größe zwischen -1 und $+1$ sein möge, so erhält man

$$(3.)\qquad \ln\left(\frac{1+\varphi i}{1-\varphi i}\right) = 2i\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^5}{5} - \frac{\varphi^7}{7} + - \cdots\right).$$

Dies gibt aber nach Formel Nr. 108 der Tabelle

$$(4.)\qquad \ln\left(\frac{1+\varphi i}{1-\varphi i}\right) = 2i \operatorname{arctg}\varphi.$$

Nach Formel Nr. 75 der Tabelle war

$$(5.)\qquad \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

folglich wird, wenn man $x = \varphi i$ setzt,

$$(6.)\qquad \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}(\varphi i) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\varphi i}{1-\varphi i}\right) = i \operatorname{arctg}\varphi.$$

Setzt man dagegen in

$$(7.)\qquad \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$$

$x = \varphi i$, so findet man

$$(8.)\qquad \operatorname{arctg}(\varphi i) = i\left(\frac{\varphi}{1} + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{\varphi^5}{5} + \cdots\right) = i\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,\varphi.$$

XIV. Abschnitt.

Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$.

§ 112.

Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$.

Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion n^{ten} Grades in n lineare Faktoren.

Es sei

$$(1.)\quad f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von x, wobei die Koeffizienten a, a_1, $a_2, \ldots a_n$ reelle oder komplexe Größen sind; nur werde zunächst vorausgesetzt, daß a von Null verschieden sei, dann nennt man

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

„eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades".

Ist nun $f(x)$ für irgend einen reellen oder komplexen Wert von x nicht gleich Null, so kann man, wie sich streng nachweisen läßt*), die komplexe Größe h stets so bestimmen, daß

$$|f(x+h)| < |f(x)|$$

wird. Auf diese Weise kann man nach und nach andere und andere Werte von x finden, für welche $|f(x)|$ kleinere und kleinere Werte annimmt, bis schließlich

$$\lim |f(x)| = 0, \quad \text{und deshalb auch} \quad \lim f(x) = 0$$

*) Der strenge Nachweis möge hier übergangen werden, damit der Umfang dieses Lehrbuches nicht allzu groß werde.

wird. Ein solcher Wert von x wird „eine *Wurzel* der algebraischen Gleichung $f(x) = 0$" genannt. Es gilt also

Satz 1. *Jede algebraische Gleichung besitzt Wurzeln.*

Ist x_1 eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so wird

$$(2.)\quad f(x_1) = ax_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0.$$

Subtrahiert man die Gleichungen (1.) und (2.) voneinander, so erhält man

$$(3.)\quad f(x) - f(x_1) = f(x) = a(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - x_1^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}(x - x_1),$$

oder nach Formel Nr. 13 der Tabelle

$$(3a.)\quad f(x) = (x - x_1)[a(x^{n-1} + x_1x^{n-2} + x_1^2x^{n-3} + \cdots + x_1^{n-1}) + a_1(x^{n-2} + x_1x^{n-3} + x_1^2x^{n-4} + \cdots + x_1^{n-2}) + \cdots + a_{n-2}(x + x_1) + a_{n-1}].$$

Bezeichnet man die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in der eckigen Klammer mit $f_1(x)$, so wird daher

$$(4.)\quad f(x) = (x - x_1)f_1(x) = (x - x_1)(ax^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}),$$

wobei

$$b_1 = ax_1 + a_1, \quad b_2 = ax_1^2 + a_1x_1 + a_2, \ldots .$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 2. *Ist x_1 eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist $f(x)$ durch den Faktor $x - x_1$ ohne Rest teilbar.*

Nach Satz 1 hat jetzt auch die Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $f_1(x) = 0$ Wurzeln. Eine solche Wurzel sei x_2; dann ist nach Satz 2

$$(5.)\quad f_1(x) = (x - x_2)f_2(x),$$

wobei

$$f_2(x) = ax^{n-2} + c_1x^{n-3} + c_2x^{n-4} + \cdots + c_{n-2}$$

eine ganze rationale Funktion $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist. Ebenso findet man die Gleichungen

$$(6.)\quad f_2(x) = (x - x_3)f_3(x) = (x - x_3)(ax^{n-3} + d_1x^{n-4} + \cdots + d_{n-3}),$$

$$(7.)\quad f_3(x) = (x - x_4)f_4(x) = (x - x_4)(ax^{n-4} + e_1x^{n-5} + \cdots + e_{n-4}),$$

. . . .

$$(8.)\quad f_{n-2}(x) = (x - x_{n-1})f_{n-1}(x) = (x - x_{n-1})(ax + k),$$

(9.) $$f_{n-1}(x) = a(x - x_n), \quad \text{wobei} \quad x_n = -\frac{k}{a}$$

ist. Multipliziert man die Gleichungen (4.) bis (9.) miteinander und hebt die Faktoren

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \ldots f_{n-1}(x)$$

auf beiden Seiten fort, so erhält man

(10.) $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_n).$$

Daraus folgen die Sätze:

Satz 3. *Jede ganze rationale Funktion n^{ten} Grades läßt sich in n lineare Faktoren* (d. h. Faktoren ersten Grades) *zerlegen.*

Satz 4. *Jede Gleichung n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln.*

Aus Gleichung (10.) ersieht man nämlich, daß $f(x) = 0$ wird für die n Werte

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad x = x_3, \ldots x = x_n,$$

und daß $f(x)$ für keinen anderen Wert von x verschwinden kann. Denn wäre $f(x) = 0$ für $x = x_{n+1}$, wobei x_{n+1} von $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ verschieden sein soll, so würde aus Gleichung (10.) folgen

(11.) $$a(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)(x_{n+1} - x_3)\ldots(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn nach Voraussetzung sind sämtliche Faktoren dieses Produktes von 0 verschieden.

Daraus geht auch hervor, daß die Zerlegung eindeutig ist.

Läßt man die Voraussetzung, daß a von Null verschieden sei, fort, so folgt aus der Gleichung (11.), daß $a = 0$ sein muß, und daß sich $f(x)$ auf die rationale ganze Funktion $(n-1)^{ten}$ Grades

$$a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

reduziert, welche für mehr als $n - 1$ Werte von x verschwindet. Daraus würde man wieder schließen, daß auch $a_1 = 0$ sein muß. Indem man diesen Schluß wiederholt, findet man

Satz 5. *Verschwindet die ganze rationale Funktion n^{ten} Grades*

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

für mehr als n verschiedene Werte von x, so müssen sämtliche Koeffizienten $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ gleich 0 sein.

Weiß man z. B., daß

$$ax + a_1 = 0$$

wird für zwei verschiedene Werte von x, so kann man daraus schließen

$$a = 0, \quad a_1 = 0.$$

Oder wenn man weiß, daß

$$ax^2 + a_1x + a_2 = 0$$

wird für drei verschiedene Werte von x, so kann man daraus schließen

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Aus Satz 5 ergibt sich auch der

Satz 5a. *Sind zwei ganze rationale Funktionen n^{ten} Grades*

$$F(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$$

und

$$G(x) = Bx^n + B_1x^{n-1} + \cdots + B_{n-1}x + B_n$$

für mehr als n Werte von x einander gleich, so müssen die gleichstelligen Koeffizienten einander gleich sein, d. h. es muß

$$A = B, \quad A_1 = B_1, \ldots A_{n-1} = B_{n-1}, \quad A_n = B_n$$

sein. Der Beweis folgt aus Satz 5, indem man

$$F(x) - G(x) = f(x),$$

also

$$A - B = a, \ A_1 - B_1 = a_1, \ldots A_{n-1} - B_{n-1} = a_{n-1}, \ A_n - B_n = a_n$$

setzt.

§ 113.

Gleiche Wurzeln einer algebraischen Gleichung.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß unter den n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ einer Gleichung n^{ten} Grades auch etliche ein-

ander gleich sind. Ist z. B. $x_2 = x_1$, so wird nach dem vorstehenden

$$f(x) = (x - x_1)^2 f_2(x), \tag{1.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x - x_1) f_2(x) + (x - x_1)^2 f'_2(x) \\ &= (x - x_1)[2f_2(x) + (x - x_1) f'_2(x)], \end{aligned} \tag{2.}$$

oder, wenn man den Ausdruck in der eckigen Klammer mit $\varphi(x)$ bezeichnet,

$$f'(x) = (x - x_1)\varphi(x), \tag{2a.}$$

d. h. x_1 ist dann auch eine Wurzel der Gleichung

$$f'(x) = 0.$$

Dieses Resultat kann man noch verallgemeinern. Ist x_1 eine α-fache Wurzel von $f(x) = 0$, ist also z. B.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_\alpha,$$

so wird nach dem vorstehenden

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha f_\alpha(x), \tag{3.}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(x - x_1)^{\alpha-1} f_\alpha(x) + (x - x_1)^\alpha f'_\alpha(x) \\ &= (x - x_1)^{\alpha-1}[\alpha f\,(x) + (x - x_1) f'_\alpha(x)], \end{aligned} \tag{4.}$$

oder, wenn man den Ausdruck in der eckigen Klammer wieder mit $\varphi(x)$ bezeichnet,

$$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha-1}\varphi(x). \tag{4a.}$$

Dies gibt den

Satz. *Ist x_1 eine α-fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist x_1 eine $(\alpha - 1)$-fache Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, eine $(\alpha - 2)$-fache Wurzel der Gleichung $f''(x) = 0, \ldots$ und eine einfache Wurzel der Gleichung $f^{(\alpha-1)}(x) = 0$.*

Ein besonderer Fall hiervon ist der, daß

$$a_n = 0, \quad a_{n-1} = 0, \quad a_{n-2} = 0, \ldots a_{n-\alpha+1} = 0$$

wird; dann reduziert sich die Gleichung des n^{ten} Grades auf

$$f(x) = ax^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-\alpha} x^\alpha = 0 \tag{5.}$$

und hat die α-fache Wurzel $x = 0$.

Setzt man $x = \frac{1}{t}$, so geht die Gleichung $f(x) = 0$ über in



$$\frac{a}{t^n} + \frac{a_1}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{t} + a_n = 0,$$

oder, wenn man die ganze Gleichung mit t^n multipliziert, in

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a = 0. \tag{6.}$$

Jeder Wurzel t_α dieser Gleichung entspricht eine Wurzel $x_\alpha = \frac{1}{t_\alpha}$ der Gleichung $f(x) = 0$. Wenn nun

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \ldots a_{\alpha-1} = 0$$

ist, so reduziert sich Gleichung (6.) auf

$$a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_\alpha t^\alpha = 0 \tag{6a.}$$

und hat die α-fache Wurzel $t = 0$, folglich werden in diesem Falle α Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ *unendlich groß*.

§ 114.

Auftreten komplexer Wurzeln einer Gleichung.

Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung können reell sein, sie können aber auch zum Teil komplex, ja sie können auch sämtlich komplex sein. Über das Auftreten komplexer Wurzeln gilt aber der folgende

Satz 1. *Sind die Koeffizienten einer Gleichung n^{ten} Grades $f(x) = 0$ sämtlich reell, und ist $x_1 = g + hi$ eine Wurzel dieser Gleichung, so muß auch $g - hi$ eine Wurzel derselben sein.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x) = (x - g - hi) f_1(x). \tag{1.}$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte von x, folglich bleibt sie auch richtig, wenn man x auf reelle Werte beschränkt. Bringt man dann $\frac{f(x)}{x - x_1} = f_1(x)$ auf die Form $P + Qi$, wo P und Q reelle Größen sind, so wird

$$f(x) = (x - g - hi)(P + Qi).$$

Nun ist

$$(x - g - hi)(P + Qi) = [(x-g)P + Qh] + [(x-g)Q - Ph]i, \tag{2.}$$

$$(x - g + hi)(P - Qi) = [(x-g)P + Qh] - [(x-g)Q - Ph]i. \tag{3.}$$

Da aber

$$(x - g - hi)(P + Qi) = f(x) \tag{4.}$$

eine *reelle* Größe ist, so muß

$$(x - g)Q - Ph \equiv 0 \tag{5.}$$

sein, d. h. $(x - g)Q - Ph$ muß für *alle* Werte von x gleich Null sein. Daraus erkennt man nach Gleichung (3.), daß auch

$$(x - g + hi)(P - Qi) = f(x) \tag{6.}$$

wird. Die komplexen Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten treten also paarweise auf, so daß jeder komplexen Wurzel die konjugierte Größe als eine zweite Wurzel der Gleichung zugeordnet ist.

Dies gilt auch noch, wenn $x_1 = g + hi$ eine mehrfache Wurzel der Gleichung ist; denn aus

$$f(x) = (x - g - hi)^{\alpha} f_{\alpha}(x)$$

folgt, wenn man $f_{\alpha}(x)$ auf die Form $P_{\alpha} + Q\,i$ bringt, daß

$$f(x) = (x - g - hi)^{\alpha}(P_{\alpha} + Q_{\alpha}i) \tag{7.}$$

ist. Da sich aber $f(x)$ nicht ändert, wenn man $+i$ mit $-i$ vertauscht, so ist auch

$$f(x) = (x - g + hi)^{\alpha}(P_{\alpha} - Q_{\alpha}i). \tag{8.}$$

Daraus folgt unmittelbar

Satz 2. *Sind die Koeffizienten der Gleichung n^{ten} Grades sämtlich reell, und ist n eine ungerade Zahl, so muß mindestens eine Wurzel der Gleichung reell sein.*

§ 115.

Die elementaren symmetrischen Funktionen der Wurzeln.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 198.)

Erklärung. Eine Funktion der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ heißt symmetrisch, wenn sie bei jeder beliebigen Vertauschung (Permutation) der Veränderlichen unverändert bleibt.

Die algebraischen Gleichungen liefern Beispiele für die symmetrischen Funktionen. Sind z. B. x_1 und x_2 die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$f(x) = x^2 - \mathfrak{f}_1 x + \mathfrak{f}_2 = 0,$$

so wird nach § 112

(1.) $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2;$$

folglich erhält man

(2.) $$\mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2, \quad \mathfrak{f}_2 = x_1x_2.$$

Sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln einer kubischen Gleichung

$$f(x) = x^3 - \mathfrak{f}_1x^2 + \mathfrak{f}_2x - \mathfrak{f}_3 = 0,$$

so wird nach § 112

(3.) $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

oder, wenn man die Multiplikation ausführt,

(4.) $$f(x) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3,$$

folglich erhält man

(5.) $$\mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad \mathfrak{f}_3 = x_1x_2x_3.$$

So kann man fortfahren und findet das folgende allgemeine Ergebnis. Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung

(6.) $$f(x) = x^n - \mathfrak{f}_1x^{n-1} + \mathfrak{f}_2x^{n-2} - \mathfrak{f}_3x^{n-3} + - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0,$$

so wird nach § 112

(7.) $$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n),$$

oder, wenn man die Multiplikation ausführt,

(8.) $$f(x) = x^n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)x^{n-1} + (x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)x^{n-2} - + \cdots \pm x_1x_2x_3 \ldots x_n.$$

Da die Ausdrücke auf der rechten Seite von Gleichung (6.) und Gleichung (8.) einander gleich sind für alle Werte von x, so müssen nach Satz 5a in § 112 die gleichstelligen Koeffizienten einander gleich sein, es wird also

(9.) $$\begin{cases} \mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \\ \mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n, \\ \mathfrak{f}_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{f}_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n. \end{cases}$$

Die Größen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \ldots \mathfrak{f}_n$ sind, wie man ohne weiteres erkennt, *symmetrische* Funktionen der Wurzeln x_1, x_2, x_3, $\ldots x_n$, und zwar nennt man sie „die *elementaren* symme-

trischen Funktionen", erstens, weil sie besonders einfach gebildet sind, namentlich aber, *weil sich jede rationale symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ rational durch die Größen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n$ ausdrücken läßt.*

Der Beweis dieses Satzes soll aber hier übergangen werden, da in dem folgenden keine Anwendung davon gemacht wird.

Jede algebraische Gleichung n^{ten} Grades

$$ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

kann man, indem man sie durch a dividiert, auf die in Gleichung (6.) angegebene Form bringen. Dadurch wird

$$\mathfrak{f}_1 = -\frac{a_1}{a}, \quad \mathfrak{f}_2 = +\frac{a_2}{a}, \quad \mathfrak{f}_3 = -\frac{a_3}{a}, \ldots \tag{10.}$$

Bei den folgenden Untersuchungen soll daher von vornherein vorausgesetzt werden, daß der Koeffizient von x^n in $f(x)$ gleich 1 sei.

Die Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichungen n^{ten} Grades durch Ausziehen von Wurzeln ist nur für $n = 1$, 2, 3 und 4 möglich. Ist $n \geqq 5$, so ist eine solche Auflösung nur ausnahmsweise möglich. Dagegen gibt es Näherungsmethoden, durch welche man die Wurzeln jeder algebraischen Gleichung mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann. Von diesen Methoden mögen die einfachsten (unter Beschränkung auf die reellen Wurzeln) in dem folgenden Abschnitte erläutert werden.

§ 116.

Interpolationsformel von *Lagrange*.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 199.)

Aufgabe. Man soll die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1} \tag{1.}$$

so bestimmen, daß sie für n gegebene Werte von x, nämlich für x gleich $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ annimmt.

Auflösung. Die gesuchte Funktion ist

$$(2.)\qquad y =$$

$$\frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)}y_2$$

$$+\dots+\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Diese Funktion ist in der Tat eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, denn jedes Glied ist vom Grade $n-1$. Sie nimmt auch für die gegebenen Werte von x die vorgeschriebenen Werte an, denn für $x = x_1$ ist nur das erste Glied von Null verschieden und nimmt den Wert y_1 an; für $x = x_2$ ist nur das zweite Glied von Null verschieden und nimmt den Wert y_2 an; usw. Für $x = x_n$ ist nur das letzte Glied von Null verschieden und nimmt den Wert y_n an.

Man kann Gleichung (2.) noch auf eine einfachere Form bringen, wenn man

$$(3.)\qquad f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)$$

setzt; dann wird

$$(4.)\qquad f'(x) =$$

$$(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) + (x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)$$

$$+\dots+(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}).$$

Dies gibt

$$(5.)\qquad \begin{cases} f'(x_1) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n), \\ f'(x_2) = (x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f'(x_n) = (x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1}). \end{cases}$$

Hit Hilfe dieser Ausdrücke geht Gleichung (2.) über in

$$(6.)\qquad y = \frac{f(x)\,.\,y_1}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{f(x)\,.\,y_2}{(x-x_2)f'(x_2)} + \dots + \frac{f(x)\,.\,y_n}{(x-x_n)f'(x_n)}.$$

Beispiel. Man soll die Funktion

$$y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$$

bestimmen, welche für die Werte

$$x = 1,\quad x = 4,\quad x = 6,\quad x = 9$$

bezw. die Werte

$$y = 2, \quad y = 5, \quad y = 3, \quad y = 6$$

annimmt.

Auflösung. Hier wird

$$(7.)\quad y = 2\frac{(x-4)(x-6)(x-9)}{(1-4)(1-6)(1-9)} + 5\frac{(x-1)(x-6)(x-9)}{(4-1)(4-6)(4-9)} + 3\frac{(x-1)(x-4)(x-9)}{(6-1)(6-4)(6-9)} + 6\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(9-1)(9-4)(9-6)},$$

oder

$$y = -\frac{1}{60}(x^3-19x^2+114x-216)+\frac{1}{6}(x^3-16x^2+69x-54) - \frac{1}{10}(x^3-14x^2+49x-36)+\frac{1}{20}(x^3-11x^2+34x-24),$$

oder

$$(8.)\qquad 10y = x^3 - 15x^2 + 64x - 30.$$

Man kann der Interpolationsformel von *Lagrange* eine geometrische Deutung geben, wenn man $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots x_n, y_n$ als die Koordinaten der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ betrachtet. Dann stellt die Gleichung (2.) eine Kurve dar, welche durch die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ hindurchgeht.

§ 117.

Interpolationsformel von *Newton*.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 200 und 201.)

Die in dem vorhergehenden Paragraphen behandelte Aufgabe, eine ganze rationale Funktion $y = f(x)$ so zu bestimmen, daß sie für n gegebene Werte von x, nämlich für x gleich $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ annimmt, läßt sich auch in folgender Weise lösen. Man setze

$$(1.)\quad y = y_1 + A_1(x-x_1) + A_2(x-x_1)(x-x_2) + A_3(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + \cdots + A_{n-1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1}),$$

wobei über die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ noch passend verfügt werden soll. Zunächst erhält y für $x = x_1$ den vorgeschriebenen Wert y_1; sodann findet man für $x = x_2$ aus Gleichung (1.)

(2.) $$y_2 = y_1 + A_1(x_2 - x_1),$$
oder

(3.) $$A_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Für $x = x_3$ wird

(4.) $$y_3 = y_1 + A_1(x_3 - x_1) + A_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2),$$
oder

(5.) $$A_2 = \frac{(y_3 - y_1) - A_1(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Indem man so weiter fortfährt und für x die Werte $x_4, x_5, \ldots x_n$ einsetzt, kann man die Koeffizienten A_3, A_4, $\ldots A_{n-1}$ der Reihe nach berechnen.

Für das im vorigen Paragraphen durchgeführte Beispiel, bei dem

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 6, \quad x_4 = 9,$$
$$y_1 = 2, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 3, \quad y_4 = 6$$

war, findet man also

(6.) $$y = 2 + A_1(x-1) + A_2(x-1)(x-4) + A_3(x-1)(x-4)(x-6).$$

Dies gibt für $x = 4$

(7.) $$5 = 2 + 3A_1, \quad \text{oder} \quad A_1 = 1;$$

für $x = 6$ wird

(8.) $$3 = 2 + 5A_1 + 5 \,.\, 2A_2 = 2 + 5 + 10A_2, \quad \text{oder} \quad A_2 = -\frac{2}{5};$$

und für $x = 9$ wird

(9.) $$6 = 2 + 8A_1 + 8 \,.\, 5A_2 + 8 \,.\, 5 \,.\, 3A_3 = 2 + 8 - 16 + 120A_3,$$
oder

(10.) $$A_3 = \frac{1}{10}.$$

Man erhält also in Übereinstimmung mit Gleichung (8.) in § 116

(11.) $$y = 2 + (x-1) - \frac{2}{5}(x-1)(x-4) + \frac{1}{10}(x-1)(x-4)(x-6).$$

Besonders einfach wird diese Interpolationsformel, wenn

(12.) $$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

wird; dann setze man

$$(13.)\quad y_2 - y_1 = \Delta y_1,\quad y_3 - y_2 = \Delta y_2,\quad y_4 - y_3 = \Delta y_3, \ldots,$$

$$(14.)\quad \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1,\quad \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2,\quad \Delta y_4 - \Delta y_3 = \Delta^2 y_3, \ldots,$$

$$(15.)\quad \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1,\quad \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2,\quad \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3 = \Delta^3 y_3, \ldots,$$

. . . .

$$(16.)\quad \Delta^m y_2 - \Delta^m y_1 = \Delta^{m+1} y_1,\quad \Delta^m y_3 - \Delta^m y_2 = \Delta^{m+1} y_2, \ldots.$$

Aus dieser Erklärung folgt durch Analogie mit dem binomischen Lehrsatz, wie man auch durch den Schluß von n auf $n+1$ streng beweisen kann,

$$(17.)\quad \Delta^2 y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,\qquad \Delta^2 y_2 = y_4 - 2y_3 + y_2, \ldots$$

$$(18.)\quad \Delta^3 y_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1,\quad \Delta^3 y_2 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2, \ldots$$

. . . .

$$(19.)\quad \Delta^m y_1 = y_{m+1} - \binom{m}{1} y_m + \binom{m}{2} y_{m-1} - \binom{m}{3} y_{m-2} + - \cdots \pm \binom{m}{1} y_2 \mp y_1.$$

Die Gleichungen (13.) bis (16.) kann man jetzt auch auf die Form

$$(20.)\quad y_2 = y_1 + \Delta y_1,\qquad y_3 = y_2 + \Delta y_2,\qquad y_4 = y_3 + \Delta y_3, \ldots,$$

$$(21.)\quad \Delta y_2 = \Delta y_1 + \Delta^2 y_1,\quad \Delta y_3 = \Delta y_2 + \Delta^2 y_2,\quad \Delta y_4 = \Delta y_3 + \Delta^2 y_3, \ldots,$$

$$(22.)\quad \Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1,\quad \Delta^2 y_3 = \Delta^2 y_2 + \Delta^3 y_2,\quad \Delta^2 y_4 = \Delta^2 y_3 + \Delta^3 y_3, \ldots,$$

. . . .

$$(23.)\quad \Delta^m y_2 = \Delta^m y_1 + \Delta^{m+1} y_1,\quad \Delta^m y_3 = \Delta^m y_2 + \Delta^{m+1} y_2, \ldots$$

bringen. Dies gibt durch Addition je zweier untereinander stehenden Gleichungen

$$(24.)\quad y_3 = y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1,\qquad y_4 = y_2 + 2\Delta y_2 + \Delta^2 y_2, \ldots,$$

$$(25.)\quad \Delta y_3 = \Delta y_1 + 2\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1,\quad \Delta y_4 = \Delta y_2 + 2\Delta^2 y_2 + \Delta^3 y_3, \ldots,$$

. . . .

Addiert man auch hier wieder je zwei untereinander stehende Gleichungen, so findet man

$$(26.)\quad \begin{aligned} y_4 &= y_1 + 3\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1,\\ y_5 &= y_2 + 3\Delta y_2 + 3\Delta^2 y_2 + \Delta^3 y_2, \ldots. \end{aligned}$$

So kann man fortfahren und erhält schließlich

$$(27.)\quad y_{m+1} = y_1 + \binom{m}{1}\Delta y_1 + \binom{m}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{m}{3}\Delta^3 y_1 + \cdots + \binom{m}{1}\Delta^{m-1} y_1 + \Delta^m y_1.$$

Setzt man jetzt wieder

$$(28.)\quad y = y_1 + A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) + A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots + A_{n-1}(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}),$$

so wird für $x = x_2 = x_1 + h$

$$(29.)\quad y_2 = y_1 + A_1 h,$$

also

$$(30.)\quad A_1 = \frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{\Delta y_1}{h}.$$

Für $x = x_3 = x_1 + 2h = x_2 + h$ wird

$$(31.)\quad y_3 = y_1 + 2A_1 h + 1 \,.\, 2A_2 h^2,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (24.) und (30.)

$$y_1 + 2\Delta y_1 + \Delta^2 y_1 = y_1 + 2\Delta y_1 + 1 \,.\, 2A_2 h^2,$$

also

$$(32.)\quad A_2 = \frac{\Delta^2 y_1}{1 \,.\, 2h^2}.$$

Für $x = x_4 = x_1 + 3h = x_2 + 2h = x_3 + h$ wird

$$(33.)\quad y_4 = y_1 + 3A_1 h + 2 \,.\, 3A_2 h^2 + 1 \,.\, 2 \,.\, 3A_3 h^3,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (26.), (30.) und (32.)

$$y_1 + 3\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1 + \Delta^3 y_1 = y_1 + 3\Delta y_1 + 3\Delta^2 y_1 + 1 \,.\, 2 \,.\, 3A_3 h^3,$$

also

$$(34.)\quad A_3 = \frac{\Delta^3 y_1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3h^3}.$$

In dieser Weise kann man fortfahren und erhält

$$(35.)\quad y = y_1 + \frac{\Delta y_1 \,.\, (x - x_1)}{1!\, h} + \frac{\Delta^2 y_1 \,.\, (x - x_1)(x - x_2)}{2!\, h^2} + \frac{\Delta^3 y_1 \,.\, (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!\, h^3} + \cdots + \frac{\Delta^{n-1} y_1 \,.\, (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})}{(n-1)!\, h^{n-1}}.$$

Beispiel.

Es sei $n = 5$ und

$$x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 5,\ x_4 = 6,\ x_5 = 7,$$
$$y_1 = 2,\ y_2 = 4,\ y_3 = 3,\ y_4 = 2,\ y_5 = 5;$$

dann bilde man zunächst

$\Delta y_1 = 4 - 2 = 2,\ \Delta y_2 = 3 - 4 = -1,\ \Delta y_3 = 2 - 3 = -1,\ \Delta y_4 = 5 - 2 = 3,$
$\Delta^2 y_1 = -1 - 2 = -3,\ \Delta^2 y_2 = -1 + 1 = 0,\ \Delta^2 y_3 = 3 + 1 = 4,$
$\Delta^3 y_1 = 0 + 3 = 3,\ \Delta^3 y_2 = 4 - 0 = 4,$
$\Delta^4 y_1 = 4 - 3 = 1.$

Folglich wird nach Gleichung (35.)

$$(36.)\quad y = 2 + 2(x-3) - \frac{3}{2}(x-3)(x-4) + \frac{1}{2}(x-3)(x-4)(x-5) + \frac{1}{24}(x-3)(x-4)(x-5)(x-6).$$

XV. Abschnitt.

Numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten.

§ 118.

Teiler der ganzen rationalen Funktionen.

Erklärung. Eine ganze rationale Funktion $F(x)$ heißt durch eine andere $\vartheta(x)$ teilbar, wenn sich eine ganze rationale Funktion $\varphi(x)$ so bestimmen läßt, daß $F(x)$ gleich $\vartheta(x) . \varphi(x)$ wird. Dies gibt

$$(1.) \qquad F(x) = \vartheta(x) . \varphi(x), \quad \text{oder} \quad \frac{F(x)}{\vartheta(x)} = \varphi(x).$$

Ist $\vartheta(x)$ ein Teiler von $F(x)$, so findet man $\varphi(x)$, indem man die Division nach den bekannten Regeln ausführt. Haben die Funktionen $F(x)$, $\vartheta(x)$ und $\varphi(x)$ bezw. den Grad n, l und m, so ist daher

$$(2.) \qquad n = l + m.$$

Satz 1. *Ist eine Funktion*) $F(x)$ durch eine andere desselben Grades teilbar, so ist der Quotient eine Konstante.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Gleichung (2.).

Satz 2. *Ist $\vartheta(x)$ ein Teiler der beiden Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$, so ist $\vartheta(x)$ auch ein Teiler von der Summe und der Differenz dieser Funktionen.*

---

*) Da in den folgenden Untersuchungen meist nur *ganze rationale* Funktionen in Betracht kommen, so möge der Leser, wenn nicht etwas anderes ausdrücklich hervorgehoben wird, unter Funktion immer eine *ganze rationale* Funktion verstehen.

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$F_1(x) = \vartheta(x) \,.\, \varphi_1(x), \quad F_2(x) = \vartheta(x) \,.\, \varphi_2(x), \tag{3.}$$

folglich wird

$$F_1(x) \pm F_2(x) = \vartheta(x)[\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)]. \tag{4.}$$

Satz 3. *Ist die Funktion $F(x)$ durch $\vartheta(x)$ teilbar, so ist auch $f(x) \,.\, F(x)$ durch $\vartheta(x)$ teilbar, wobei $f(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion ist.*

Beweis. Aus

$$F(x) = \vartheta(x) \,.\, \varphi(x) \tag{5.}$$

folgt unmittelbar

$$f(x) \,.\, F(x) = \vartheta(x) \,.\, f(x) \,.\, \varphi(x). \tag{6.}$$

Von diesem Satze gilt aber *nicht* die Umkehrung.

Aufgabe. Man soll den *höchsten gemeinsamen* Teiler zweier Funktionen y und y_1 finden.

Dabei versteht man unter „dem *höchsten gemeinsamen Teiler*“ einen gemeinsamen Teiler von möglichst hohem Grade.

Auflösung. Das Verfahren ist demjenigen analog, welches man anwendet, um den höchsten gemeinsamen Teiler zweier ganzen Zahlen a und b zu finden. Ist der Grad von y_1 niedriger (oder wenigstens nicht größer) als der von y, so dividiere man y durch y_1. Der Quotient sei q_1 und der Rest y_2, dann wird

$$y = q_1 \cdot y_1 + y_2, \tag{7.}$$

wobei der Grad von y_2 niedriger ist als der von y_1. Ist y_2 gleich Null, so ist y durch y_1 selbst teilbar, ist aber y_2 von Null verschieden, so ist nach Satz 2 und 3

$$y_2 = y - q_1 y_1 \tag{7a.}$$

auch teilbar durch den höchsten gemeinsamen Teiler der Funktionen y und y_1; und umgekehrt: der höchste gemeinsame Teiler von y_1 und y_2 ist auch ein Teiler von y.

Man hat jetzt also nur noch den höchsten gemeinsamen Teiler von y_1 und y_2 zu suchen. Zu diesem Zwecke dividiere man y_1 durch y_2. Dadurch erhält man

$$y_1 = q_2 \cdot y_2 + y_3, \tag{8.}$$

wobei der Grad von y_3 niedriger ist als der von y_2. Ist y_3 gleich Null, so ist y_2 ein Teiler von y_1 und deshalb auch ein Teiler von y, und zwar ist dann y_2 der höchste gemeinsame Teiler von y und y_1. Ist aber y_3 von Null verschieden, so setzt man dieses Verfahren fort, bis der Rest schließlich gleich Null wird, d. h. man bildet die Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} y = q_1 \cdot y_1 + y_2, \\ y_1 = q_2 \cdot y_2 + y_3, \\ y_2 = q_3 \cdot y_3 + y_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{m-3} = q_{m-2} \cdot y_{m-2} + y_{m-1}, \\ y_{m-2} = q_{m-1} \cdot y_{m-1} + y_m, \\ y_{m-1} = q_m \cdot y_m + 0. \end{cases}$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist eine endliche, denn der Grad der Funktionen $y, y_1, y_2, y_3, \dots$ wird immer kleiner. Entweder wird also die Division schon ohne Rest ausführbar sein, wenn y_m noch eine Funktion von x ist, oder es wird y_m eine Konstante.

Der letzte Divisor y_m ist dann der höchste gemeinsame Teiler von y und y_1.

Beweis. Nach der letzten Gleichung ist y_{m-1} teilbar durch y_m, deshalb ist nach der vorletzten Gleichung auch y_{m-2} durch y_m teilbar. Aus der drittletzten Gleichung folgt dann, daß auch y_{m-3} durch y_m teilbar ist. Indem man so fortfährt, findet man, daß auch y und y_1 durch y_m teilbar sind.

Es ist aber y_m auch der *höchste* gemeinsame Teiler von y und y_1, denn hätten y und y_1 einen Teiler $\vartheta(x)$ von höherem Grade, so wäre nach Gleichung (7a.) auch y_2 durch $\vartheta(x)$ teilbar, und deshalb auch y_3 usw. Schließlich müßte auch y_m durch $\vartheta(x)$ teilbar sein. Das ist aber nicht möglich, wenn der Grad von $\vartheta(x)$ höher ist als der von y_m. Der Grad von $\vartheta(x)$ kann also höchtens ebenso groß sein wie der von y_m, dann ist aber der Quotient von y_m und $\vartheta(x)$ eine Konstante.

Gleichzeitig folgt aus diesem Beweise

Satz 4. *Jeder gemeinsame Teiler der beiden Funktionen y und y_1 ist auch ein Teiler ihres höchsten gemeinsamen Teilers y_m.*

Erklärung. Zwei Funktionen y und y_1 heißen *„relativ prim“*, wenn ihr höchster gemeinsamer Teiler eine Konstante ist.

Beispiel 1. Es sei

$$y = x^5 + 1, \quad y_1 = x^3 - 1,$$

dann findet man durch Division

$$\begin{aligned} y &= x^2 . y_1 + y_2, && \text{wo} \quad y_2 = x^2 + 1, \\ y_1 &= x . y_2 + y_3, && \text{wo} \quad y_3 = -x - 1, \\ y_2 &= (-x + 1)y_3 + y_4, && \text{wo} \quad y_4 = 2, \\ y_3 &= \tfrac{1}{2}(-x - 1)y_4. && \end{aligned}$$

Der höchste gemeinsame Teiler ist die Konstante 2, folglich sind die beiden Funktionen relativ prim.

Beispiel 2. Es sei

$$y = x^4 - 1, \quad y_1 = x^3 - 2x^2 + x - 2,$$

dann findet man durch Division

$$\begin{aligned} y &= (x + 2)y_1 + y_2, \quad \text{wo} \quad y_2 = 3x^2 + 3, \\ y_1 &= \left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right)y_2. \end{aligned}$$

Der höchste gemeinsame Teiler ist hier also $y_2 = 3x^2 + 3$, oder, wenn man den konstanten Faktor 3 fortläßt, $x^2 + 1$. Es ist in der Tat

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1), \quad x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^2 + 1)(x - 2).$$

Satz 5. *Ist die Funktion y_1 relativ prim zu den beiden Funktionen y und f, so ist sie auch relativ prim zu ihrem Produkte $f . y$.*

Beweis. Da y_1 relativ prim zu y ist, so muß in den Gleichungen (9.) die Größe y_m eine Konstante sein. Indem man beide Seiten der Gleichungen (9.) mit dem Faktor f multipliziert, erhält man die Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} f\cdot y = q_1 \cdot f\cdot y_1 + f\cdot y_2, \\ f\cdot y_1 = q_2 \cdot f\cdot y_2 + f\cdot y_3, \\ f\cdot y_2 = q_3 \cdot f\cdot y_3 + f\cdot y_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f\cdot y_{m-2} = q_{m-1}\cdot f\cdot y_{m-1} + f\cdot y_m. \end{cases}$$

Hätten $f.y$ und y_1 einen gemeinsamen Teiler $\vartheta(x)$, so wäre nach der ersten Gleichung $\vartheta(x)$ auch ein Teiler von $f.y_2$, und deshalb nach der zweiten Gleichung auch ein Teiler von $f.y_3$, usw. Aus der letzten Gleichung würde folgen, daß $\vartheta(x)$ auch ein Teiler von $f.y_m$ ist. Da aber y_m eine Konstante ist, so wäre $\vartheta(x)$ ein gemeinsamer Teiler von f und y_1, was der Voraussetzung widerstreitet.

Satz 6. *Sind die Funktionen y und y_1 relativ prim, ist aber $f.y$ teilbar durch y_1, so muß die Funktion f teilbar sein durch y_1.*

Beweis. Aus den Gleichungen (10.) folgt wieder, daß $f.y_m$ durch y_1 teilbar sein muß, wenn $f.y$ durch y_1 teilbar ist. Da aber y_m nach Voraussetzung eine Konstante ist, so ist die Funktion f teilbar durch y_1.

Satz 7. *Ist eine Funktion durch beliebig viele andere Funktionen teilbar, die paarweise zueinander relativ prim sind, so ist sie auch durch ihr Produkt teilbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung sei die Funktion u teilbar durch die Funktionen y und z, die zueinander relativ prim sind, es sei also

$$u = f.y.$$

Nun ist $f.y$ nach Voraussetzung teilbar durch z, folgfolglich muß nach Satz 6 die Funktion f teilbar sein durch z; es ist also

$$f = g.z \quad \text{und deshalb} \quad u = g.y.z.$$

Ist u durch n Funktionen $y_1, y_2, \dots y_n$ teilbar, die paarweise zueinander relativ prim sind, so ist u nach dem eben geführten Beweise teilbar durch y_1y_2, und da y_3 nach Satz 5 zu y_1y_2 relativ prim ist, so ist u auch teilbar durch $y_1y_2y_3$. So kann man fortfahren und zeigen, daß u durch $y_1y_2y_3 \dots y_n$ teilbar ist*).

*) Alle diese Sätze gelten auch für positive ganze Zahlen, wenn man an die Stelle des konstanten Faktors die Einheit setzt.

§ 119.

Gemeinsame Teiler der Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 202 bis 204.)

In § 113 wurde gezeigt, daß die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ den Faktor $(x - x_1)^{\alpha-1}$ gemeinsam haben, wenn x_1 eine α-fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, und zwar folgte aus

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha \cdot f_1(x), \tag{1.}$$

$$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha-1} \cdot \varphi(x), \tag{2.}$$

wobei

$$\varphi(x) = \alpha f_1(x) + (x - x_1) f_1'(x). \tag{3.}$$

Wäre $\varphi(x)$ noch durch $x - x_1$ teilbar, so wäre nach Gleichung (3.) $f_1(x)$ durch $x - x_1$ teilbar, d. h. $f(x)$ wäre durch $(x - x_1)^{\alpha+1}$ teilbar. Das soll in dem folgendem nicht der Fall sein, es soll vielmehr

$$f(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m} \cdot \psi(x) \tag{4.}$$

sein, wobei die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ alle größer als 1 sind, während $\psi(x)$ nur *einfache* lineare Faktoren enthalten möge, die von $x - x_1, x - x_2, \ldots x - x_m$ verschieden sind. Dann ist $f'(x)$ durch die Faktoren

$$(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}, \quad (x - x_2)^{\alpha_2 - 1}, \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1}$$

teilbar, und da diese Faktoren paarweise relativ prim sind, so ist $f'(x)$ auch durch ihr Produkt teilbar; es wird also

$$f'(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1}(x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1} \cdot g(x). \tag{5.}$$

Dabei enthält nach den vorstehenden Ausführungen $g(x)$ keinen der Faktoren $x - x_1, x - x_2, \ldots x - x_m$; und auch $\psi(x)$ ist zu $g(x)$ relativ prim, denn die Ableitung $f'(x)$ enthält keinen der einfachen Faktoren von $f(x)$. Folglich ist

$$\vartheta(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1}(x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (x - x_m)^{\alpha_m - 1} \tag{6.}$$

der höchste gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, und die ganze rationale Funktion

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x)} = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) \cdot \psi(x) \tag{7.}$$

hat nur noch *einfache* lineare Faktoren.

Daraus ergibt sich die Lösung der folgenden Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll eine Gleichung finden, welche dieselben Wurzeln hat wie $f(x) = 0$, aber jede nur einmal.

Auflösung. Man suche den höchsten gemeinsamen Teiler $\vartheta(x)$ von $f(x)$ und $f'(x)$, dann ist

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x)} = 0 \tag{8.}$$

die gesuchte Gleichung.

Aufgabe 2. Man soll eine Gleichung finden, welche nur die mehrfachen Wurzeln von $f(x) = 0$ enthält, und jede nur einmal.

Auflösung. Man bestimme den höchsten gemeinsamen Teiler $\varrho(x)$ von $f'(x)$ und $\frac{f(x)}{\vartheta(x)}$, dann ist

$$\varrho(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m) = 0 \tag{9.}$$

die gesuchte Gleichung.

Aufgabe 3. Man soll eine Gleichung finden, welche nur die einfachen Wurzeln von $f(x) = 0$ enthält.

Auflösung. Die gesuchte Gleichung ist

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x) \,.\, \varrho(x)} = \psi(x) = 0. \tag{10.}$$

Will man die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ berechnen, so kommt es also nur darauf an, die Wurzeln der Gleichungen (9.) und (10.) zu berechnen. Wenn $f(x) = 0$ mehrfache Wurzeln hat, so sind diese Gleichungen von niedrigerem Grade und haben nur einfache Wurzeln.

§ 120.

Obere und untere Grenze der reellen Wurzeln.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 205.)

In diesem und den vier folgenden Paragraphen soll nur von Gleichungen mit lauter reellen Koeffizienten die Rede sein.

Erklärung. Die *obere Grenze* der reellen Wurzeln einer Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1.}$$

ist eine Zahl L, die größer ist als alle reellen Wurzeln.

Eine solche Zahl L kann man leicht finden, wie zunächst an dem folgenden Beispiele gezeigt werden möge. Es sei x eine positive Wurzel der Gleichung

$$x^6 + 5x^4 - 7x^2 - 16x + 27 = 0,$$

dann ist

$$x^6 < x^6 + 5x^4 + 27 = 7x^2 + 16x < 16(x^2 + x + 1),$$

also

$$x^6 < 16\,\frac{x^3 - 1}{x - 1},$$

oder, wenn $x > 1$ ist,

$$x^6(x - 1) < 16(x^3 - 1) < 16x^3,$$

folglich ist

$$x^3(x - 1) < 16.$$

Nun ist $x - 1 < x$ und $(x - 1)^3 < x^3$; deshalb wird

$$(x - 1)^4 < 16, \quad x - 1 < \sqrt[4]{16} = 2, \quad x < 3.$$

Hier ist also die obere Grenze L aller reellen Wurzeln gleich 3.

In dem allgemeinen Falle, welchem die Gleichung (1.) entspricht, sei $a_m = -b_m$ der *erste* und $a_p = -b_p$ (dem absoluten Betrage nach) der *größte* negative Koeffizient, es sei also

$$\text{(1a.)}\quad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots - b_mx^{n-m} \pm \cdots - b_px^{n-p} \pm \cdots + a_n = 0.$$

Ist x wieder eine reelle positive Wurzel dieser Gleichung, so findet man, indem man alle negativen Glieder auf die rechte Seite schafft,

$$\text{(2.)}\quad x^n \leqq x^n + a_1x^{n-1} + \cdots = b_mx^{n-m} + \cdots + b_px^{n-p} + \cdots;$$

deshalb ist erst recht

$$\text{(3.)}\quad x^n < b_p(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \cdots + x + 1) = b_p\,\frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1},$$

oder, wenn $x > 1$ ist,

$$\text{(4.)}\quad x^n(x - 1) < b_p(x^{n-m+1} - 1) < b_px^{n-m+1},$$

oder, wenn man beide Seiten dieser Ungleichung durch x^{n-m+1} dividiert,

$$\text{(5.)}\quad x^{m-1}(x - 1) < b_p.$$

Nun ist noch $x-1<x$ und deshalb $(x-1)^{m-1}<x^{m-1}$, deshalb findet man aus Ungleichung (5.)

$$(6.)\qquad (x-1)^m < b_p, \quad x-1 < \sqrt[m]{b_p},$$

also

$$(7.)\qquad x < 1 + \sqrt[m]{b_p} = L.$$

Zum Schluß kann man die über die Größe von x gemachten Voraussetzungen aufheben, denn die Ungleichung (7.) wird erst recht befriedigt, wenn $x<1$, oder wenn x negativ ist.

In derselben Weise kann man für die reellen Wurzeln eine untere Grenze $-K$ angeben. Indem man nämlich in der Gleichung $f(x)=0$ mit den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Veränderliche x mit $-x$ vertauscht, erhält man eine Gleichung

$$(8.)\qquad f_1(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - + \cdots \pm a_n = 0$$

mit den Wurzeln $-x_1, -x_2, \cdots -x_n$. Bestimmt man also für diese Gleichung die obere Grenze K der Wurzeln, so ist $-K$ die untere Grenze der reellen Wurzeln für die Gleichung $f(x)=0$.

So findet man bei dem oben angeführten Zahlenbeispiel die Gleichung

$$f_1(x) = x^6 + 5x^4 - 7x^2 + 16x + 27 = 0,$$

für welche

$$m=4, \quad b_p = 7$$

ist; folglich wird

$$K = 1 + \sqrt[4]{7} < 2{,}63.$$

Die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen daher zwischen

$$-2{,}63 \quad \text{und} \quad +3.$$

Vertauscht man in der gegebenen Gleichung x mit $\frac{1}{x}$ und sucht für die sich daraus ergebende Gleichung die obere Grenze L' und die untere Grenze $-K'$ der reellen Wurzeln, so kann zwischen $-\frac{1}{K'}$ und $\frac{1}{L'}$ keine Wurzel der gegebenen Gleichung liegen.

Für das vorgelegte Zahlenbeispiel wird die transformierte Gleichung

$$x^6 - \frac{16}{27}x^5 - \frac{7}{27}x^4 + \frac{5}{27}x^2 + \frac{1}{27} = 0,$$

also

$$m = 1, \quad b_p = \frac{16}{27}, \quad L' = 1 + \frac{16}{27} = \frac{43}{27};$$

ebenso findet man

$$K' = 1 + \sqrt[2]{\frac{7}{27}} < 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}.$$

Die gegebene Gleichung hat also zwischen $-\frac{9}{14}$ und $+\frac{27}{43}$ keine Wurzel.

§ 121.

*Cartesi*sche Zeichenregel.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 206 bis 206 b.)

Satz 1. *Hat die Gleichung $f(x) = 0$ lauter negative reelle Wurzeln, so sind die Koeffizienten der Gleichung sämtlich positiv.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$x_1 = -a, \; x_2 = -b, \quad x_3 = -c, \; \ldots x_n = -l,$$

wobei die Größen $a, b, c, \ldots l$ sämtlich positiv sind, folglich wird

$$f(x) = (x + a)(x + b)(x + c) \ldots (x + l). \tag{1.}$$

Führt man die Multiplikation aus, so kann in dem Produkt kein Minuszeichen auftreten, da die einzelnen Faktoren keines enthalten. Es kann auch keiner der Koeffizienten verschwinden.

In dem Ausdrucke

$$(x - g - hi)(x - g + hi) = x^2 - 2gx + (g^2 + h^2)$$

ist das letzte Glied $g^2 + h^2$ positiv. In dem Ausdrucke

$$(x - g_1 - h_1 i)(x - g_1 + h_1 i)(x - g_2 - h_2 i)(x - g_2 + h_2 i) \ldots$$
$$(x - g_\alpha - h_\alpha i)(x - g_\alpha + h_\alpha i)$$

wird, wenn man ausmultipliziert und nach fallenden Potenzen von x ordnet, das letzte Glied

$$(g_1^2 + h_1^2)(g_2^2 + h_2^2) \ldots (g_\alpha^2 + h_\alpha^2)$$

ebenfalls positiv. Auch wenn man dieses Produkt jetzt noch

mit $(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+l)$ multipliziert und nach fallenden Potenzen von x ordnet, ist das letzte Glied

$$abc\ldots l(g_1^2+h_1^2)(g_2^2+h_2^2)\ldots(g_\alpha^2+h_\alpha^2)$$

positiv. Dies gibt

Satz 2. *Hat die Gleichung*

$$\varphi(x)=x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-r-1}x^{r+1}+b_{m-r}x^r=0$$

außer der Wurzel $x=0$ *nur negative und komplexe*) Wurzeln, so ist der Koeffizient des letzten Gliedes positiv.*

Erklärung. Wenn zwei aufeinanderfolgende Glieder dasselbe Vorzeichen haben, so nennt man dies „eine *Zeichenfolge*"; haben sie aber das entgegengesetzte Zeichen, so nennt man dies „einen *Zeichenwechsel*". Etwa verschwindende Glieder, d. h. Glieder, deren Koeffizient gleich Null ist, werden dabei einfach übergangen.

Satz 3. *Die Anzahl der positiven Wurzeln einer Gleichung kann nie größer sein als die Anzahl der Zeichenwechsel; dabei ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel und der Anzahl der positiven Wurzeln eine gerade Zahl.*

Beweis. Multipliziert man die Funktion

$$\varphi(x)=x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-r}x^r, \tag{2.}$$

welche nur *positive* Glieder enthalten möge und deshalb *keinen* Zeichenwechsel besitzt, mit $x-a$, so ergibt sich

$$(x-a)\varphi(x)= \tag{3.}$$
$$x^{m+1}+(b_1-a)x^m+(b_2-ab_1)x^{m-1}+\cdots-ab_{m-r}x^r.$$

In diesem Produkte ist das erste Glied positiv und das letzte negativ, es muß also mindestens *ein* Zeichenwechsel eintreten. Es ist aber auch möglich, daß zwischen x^{m+1} und $-ab_{m-r}x^r$ negative und darauffolgende positive Glieder liegen, dann würden sogar 3, oder 5, oder noch mehr Zeichenwechsel eintreten; die Anzahl der Zeichenwechsel ist also stets eine ungerade Zahl $2\nu+1$.

---

*) Wenn hier von *komplexen* Wurzeln von der Form $g+hi$ im Gegensatz zu den *reellen* Wurzeln die Rede ist, so versteht man darunter Größen, bei denen der Faktor h des imaginären Teiles von Null verschieden ist.



Das bleibt auch noch richtig, wenn von den Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots b_{m-r}$ einzelne gleich Null sind.

Beispiel. Es sei

$$\varphi(x) = x^4 + 2x,$$

dann hat

$$(x-3)\varphi(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 6x$$

sogar *drei* Zeichenwechsel.

Hat

$$\varphi(x) = \tag{4.}$$
$$x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{p-1}x^{m-p+1} - c_px^{m-p} - \cdots - c_{m-r}x^r$$

einen Zeichenwechsel, so wird

$$(x-a)\varphi(x) = \tag{5.}$$
$$x^{m+1} + (b_1 - a)x^m + \cdots - (c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1} - \cdots + ac_{m-r}x^r.$$

In diesem Ausdrucke ist das erste Glied positiv, das Glied $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ ist negativ, und das letzte Glied $ac_{m-r}x^r$ ist wieder positiv, folglich treten mindestens *zwei* Zeichenwechsel ein. Es können aber auch 4, oder 6, oder noch mehr Zeichenwechsel eintreten, indem zwischen x^{m+1} und $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ noch negative und dann wieder positive Glieder liegen. Auch zwischen $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ und $ac_{m-r}x^r$ können noch positive Glieder liegen, auf die negative Glieder folgen; die Anzahl der Zeichenwechsel muß aber stets eine *gerade* Zahl $2v + 2$ sein, weil $(x-a)\varphi(x)$ mit einem positiven Gliede anfängt und mit einem positiven Gliede schließt.

Hat

$$\begin{aligned}\varphi(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{p-1}x^{m-p+1} - c_px^{m-p} \\ - \cdots - c_{q-1}x^{m-q+1} + d_qx^{m-q} + \cdots + d_{m-r}x^r\end{aligned} \tag{6.}$$

zwei Zeichenwechsel, so wird

$$\begin{aligned}(x-a)\varphi(x) = x^{m+1} + (b_1 - a)x^m + \cdots - (c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1} \\ - \cdots + (d_q + ac_{q-1})x^{m-q+1} + \cdots - ad_{m-r}x^r.\end{aligned} \tag{7.}$$

In diesem Ausdrucke ist das erste Glied positiv, das Glied $-(c_p + ab_{p-1})x^{m-p+1}$ ist negativ, das Glied $+(d_q + ac_{q-1})x^{m-q+1}$ ist positiv, und das letzte Glied $-ad_{m-r}x^r$

ist negativ, folglich treten mindestens *drei* Zeichenwechsel ein. Es können aber auch noch mehr Zeichenwechsel auftreten; dabei muß die Anzahl der Zeichenwechsel stets eine ungerade Zahl $2\nu+3$ sein, weil $(x-a)\varphi(x)$ mit einem positiven Gliede anfängt und mit einem negativen Gliede schließt.

In dieser Weise kann man fortfahren und zeigen, daß $(x-a)\varphi(x)$ mindestens *einen* Zeichenwechsel mehr hat als $\varphi(x)$.

Sind nun $a_1, a_2, \ldots a_\varkappa$ die positiven Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, ist also

$$(8)\qquad f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varkappa)\,.\,\varphi(x),$$

wobei

$$\varphi(x)=x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-r}x^r=0$$

außer der Wurzel $x=0$ nur noch negative und komplexe Wurzeln hat, so ist nach Satz 2 der Koeffizient b_{m-r} des letzten Gliedes positiv, folglich muß die Anzahl der Zeichenwechsel in $\varphi(x)$ eine *gerade* Zahl 2ν sein. Nach dem vorstehenden ist dann die Anzahl der Zeichenwechsel

in $(x-a_1)\varphi(x)$	$2\nu+2\nu_1+1,$
„ $(x-a_1)(x-a_2)\varphi(x)$	$2\nu+2\nu_1+2\nu_2+2,$
. . . .	. . . .
„ $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varkappa)\varphi(x)$	$2\nu+2\nu_1+2\nu_2+\cdots+2\nu_\varkappa+\varkappa,$

wobei $2\nu+2\nu_1+2\nu_2+\cdots+2\nu_\varkappa$ eine positive gerade Zahl ist, die auch gleich Null sein kann. Die Anzahl der Zeichenwechsel ist also mindestens gleich der Anzahl $\varkappa$ der positiven Wurzeln und kann sich von $\varkappa$ nur durch eine *gerade* Zahl unterscheiden.

Vertauscht man wieder x mit $-x$, so geht $f(x)=0$ in eine Gleichung $f_1(x)=0$ über, bei der die Koeffizienten von $x^{n-1}, x^{n-3}, x^{n-5}, \ldots$ und die sämtlichen Wurzeln das entgegengesetzte Zeichen haben wie in der gegebenen Gleichung. Ist nun die Anzahl der Zeichenwechsel in dieser Gleichung λ, so kann sie höchstens λ positive Wurzeln haben; deshalb hat die gegebene Gleichung höchstens λ negative Wurzeln. Dabei kann sich auch hier die Anzahl

der negativen Wurzeln von λ nur durch eine *gerade* Zahl unterscheiden.

Ist das Polynom

$$(9.)\qquad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

vollständig, sind also die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ sämtlich reell und von Null verschieden, so wird jede Zeichenfolge in $f(x)$ zum Zeichenwechsel in $f_1(x)$, und jeder Zeichenwechsel in $f(x)$ wird zur Zeichenfolge in $f_1(x)$. Daraus ergibt sich

Satz 4. *Ist das Polynom $f(x)$ vollständig, so ist die Anzahl der negativen Wurzeln nie größer als die Anzahl der Zeichenfolgen. Dabei ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenfolgen und der Anzahl der negativen Wurzeln eine gerade Zahl.*

Satz 5. *Ist das Polynom $f(x)$ vollständig, und sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell, so ist die Anzahl $\varkappa$ der positiven Wurzeln ebenso groß wie die Anzahl der Zeichenwechsel, und die Anzahl λ der negativen Wurzeln ist ebenso groß wie die Anzahl der Zeichenfolgen.*

Beweis. Die Anzahl aller reellen Wurzeln ist nach Voraussetzung

$$\varkappa + \lambda = n.$$

Ist nun die Anzahl der Zeichenwechsel $\varkappa'$ und die Anzahl der Zeichenfolgen λ', so ist nach Satz 3 und 4

$$\varkappa' \geqq \varkappa, \quad \lambda' \geqq \lambda.$$

Da aber $\varkappa' + \lambda'$ ebenfalls gleich n sein muß, so ist

$$\varkappa' + \lambda' = \varkappa + \lambda,$$

und das ist nur möglich, wenn

$$\varkappa' = \varkappa, \quad \lambda' = \lambda.$$

Satz 6. *Verschwindet ein Glied von $f(x)$ zwischen zwei positiven oder zwei negativen Gliedern, so folgt daraus die Existenz zweier komplexen Wurzeln.*

Beweis. Vertauscht man in $f(x)$ das verschwindende Glied mit einem positiven Gliede, so werden die Zeichenkombinationen

$$+ 0 + \quad \text{und} \quad - 0 -$$

in

$$+ + + \quad \text{und} \quad - + -$$

übergeführt; in $f_1(x)$ dagegen gehen die Zeichenkombinationen

$$\pm 0 \pm \quad \text{und} \quad \mp 0 \mp$$

in

$$\pm \mp \pm \quad \text{und} \quad \mp \mp \mp$$

über. Durch das Verschwinden des eingesetzten Gliedes gehen also entweder in $f(x)$ oder in $f_1(x)$ zwei Zeichenwechsel verloren. Die Summe der Zeichenwechsel in $f(x)$ und $f_1(x)$ kann daher höchstens $n-2$ sein, folglich ist auch die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(x)=0$ höchstens $n-2$.

Ähnliches hätte man gefunden, wenn man das verschwindende Glied durch ein negatives Glied ersetzt hätte.

Man kann diesen Satz sogleich auf den Fall verallgemeinern, wo an mehreren Stellen ein Glied von $f(x)$ zwischen zwei positiven oder zwischen zwei negativen Gliedern verschwindet. Die Anzahl der komplexen Wurzelpaare ist dann mindestens ebenso groß wie die Anzahl dieser Stellen.

Satz 7. *Verschwinden in $f(x)$ zwei nebeneinanderstehende Glieder, so folgt daraus ebenfalls die Existenz zweier komplexen Wurzeln.*

Beweis. Vertauscht man in den 4 möglichen Zeichenkombinationen

$$+00+ \qquad +00- \qquad -00+ \qquad -00-$$

die verschwindenden Glieder durch passend gewählte nicht verschwindende, so erhält man die Zeichenkombinationen

$$+-++ \qquad +-+- \qquad -+-+ \qquad -+--$$

und erkennt, daß durch das Verschwinden der beiden Glieder zwei Zeichenwechsel in $f(x)$ verloren gegangen sind, während in $f_1(x)$ die Anzahl der Zeichenwechsel dieselbe geblieben ist; folglich kann $f(x)$ höchstens $n-2$ reelle Wurzeln haben.

Auch hier kann der Satz auf den Fall verallgemeinert werden, wo an mehreren Stellen zwei aufeinanderfolgende Glieder verschwinden.

Beispiel. Es sei

$$f(x) = x^{12} - x^{11} + 3x^8 + 12x^2 - 19x - 24 = 0,$$

also

$$f_1(x) = x^{12} + x^{11} + 3x^8 + 12x^2 + 19x - 24 = 0;$$

hier hat $f(x)$ nur drei und $f_1(x)$ nur einen Zeichenwechsel, folglich hat die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens drei positive und nur eine negative Wurzel; mindestens acht Wurzeln sind komplex.

§ 122.

Der *Sturm*sche Satz.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 207.)

Über die Intervalle, in denen die reellen Wurzeln liegen, gibt bereits Satz 16 in § 9 (Seite 66 und 67) Auskunft. Danach gibt es zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Wert von x, für welchen die stetige Funktion $f(x)$ gleich Null wird, wenn $f(x)$ in diesem Intervalle das Zeichen wechselt, wenn also entweder

$$f(x_1) < 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) > 0,$$

oder

$$f(x_1) > 0 \quad \text{und} \quad f(x_2) < 0$$

ist. In dem vorliegenden Falle ist die Funktion $f(x)$ eine ganze rationale Funktion, nämlich

$$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \tag{1.}$$

Bei dieser und den folgenden Untersuchungen kommt es häufig vor, daß der Wert der ganzen rationalen Funktion $f(x)$ für irgendeinen Wert von x, z. B. für $x = x_1$ berechnet werden soll. Dies geschieht in der Regel am einfachsten durch dasselbe Verfahren, welches bei der Division durch $x - x_1$ ausgeführt wird. Setzt man nämlich

$$b_1 = a_1 + ax_1, \quad b_2 = a_2 + b_1x_1, \quad b_3 = a_3 + b_2x_1, \tag{2.}$$
$$\ldots b_n = a_n + b_{n-1}x_1,$$

so findet man durch Ausführung der Division

(3.) $$f(x) = ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= (x - x_1)(ax^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \cdots + b_{n-1}) + b_n.$$

Dabei erfolgt die Berechnung der Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}, b_n$ am einfachsten durch Addition der in dem folgenden Schema untereinander stehenden Zahlen:

$$\begin{array}{cccccccc} a & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ & ax_1 & b_1x_1 & b_2x_1 & \ldots & b_{n-2}x_1 & b_{n-1}x_1 \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & & b_{n-1} & b_n. \end{array}$$

Aus Gleichung (3.) ergibt sich dann ohne weiteres

(4.) $$f(x_1) = b_n.$$

Beispiel. Es sei
$$f(x) = 40x^3 - 639x^2 + 3029x - 4032,$$
dann findet man die Werte $f(2)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(9)$ bezw. in folgender Weise

$$\begin{array}{rrrrl} 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +80 & -1118 & +3822 & \\ \hline & -559 & +1911 & -210 & = f(2), \\ 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +160 & -1916 & +4452 & \\ \hline & -479 & +1113 & +420 & = f(4), \\ 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +280 & -2513 & +3612 & \\ \hline & -359 & +516 & -420 & = f(7), \\ 40 & -639 & +3029 & -4032 & \\ & +360 & -2511 & +4662 & \\ \hline & -279 & +518 & +630 & = f(9). \end{array}$$

Da
$$f(2) = -210 < 0, \quad f(4) = +420 > 0, \quad f(7) = -420 < 0,$$
$$f(9) = +630 > 0$$
ist, so folgt gleichzeitig hieraus, daß in jedem der Intervalle 2 bis 4, 4 bis 7, 7 bis 9 eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt.

Um die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche in dem Intervalle von x_1 bis x_2 liegen,

genau zu bestimmen, hat *Charles Sturm* das folgende Verfahren angegeben.

Sucht man den größten gemeinsamen Teiler zwischen $f(x)$ und $f'(x)$, so erhält man nach den Angaben in § 118, wenn man die bei der Division sich ergebenden Reste bezw. mit $-f_2(x)$, $-f_3(x)$, $\cdots -f_\mu(x)$ bezeichnet, das folgende Schema:

$$(5.)\quad \begin{cases} f(x) = Q_1(x) \cdot f'(x) - f_2(x), \\ f'(x) = Q_2(x) \cdot f_2(x) - f_3(x), \\ f_2(x) = Q_3(x) \cdot f_3(x) - f_4(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{\mu-2}(x) = Q_{\mu-1}(x) \cdot f_{\mu-1}(x) - f_\mu(x), \\ f_{\mu-1}(x) = Q_\mu(x) \cdot f_\mu(x). \end{cases}$$

Hierbei ist $f_\mu(x)$ der größte gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$. Die vorstehende Rechnung kann deshalb, wie bereits in § 119 gezeigt wurde, dazu benutzt werden, um die Auflösung der Gleichung $f(x) = 0$ zurückzuführen auf die Auflösung der Gleichungen

$$(6.)\quad \varrho(x) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{f(x)}{\vartheta(x) \cdot \varrho(x)} = 0,$$

welche nur einfache Wurzeln besitzen. (Vgl. § 119, Gl. (9.) und (10.))

Setzt man in dem folgenden voraus, daß $f(x)$ nur einfache Wurzeln hat, so ist $f_\mu(x)$ eine Konstante, die mit f_μ bezeichnet werden möge.

Verschwindet von den Funktionen

$$f_\mu,\ f_{\mu-1}(x), \ldots f_3(x),\ f_2(x),\ f'(x)$$

irgendeine, z. B. $f_\varkappa(x)$ für $x = a$, so muß

$$f_{\varkappa-1}(a) \lesseqgtr 0 \quad \text{und} \quad f_{\varkappa+1}(a) \gtreqless 0$$

sein. Wäre nämlich $f_{\varkappa+1}(a) = 0$, so würde aus der Gleichung

$$f_{\varkappa-1}(a) = Q_\varkappa(a) \cdot f_\varkappa(a) - f_{\varkappa+1}(a)$$

folgen, daß auch $f_{\varkappa-1}(a) = 0$ wäre. Dann wäre aber

$$f_{\varkappa-2}(a) = Q_{\varkappa-1}(a) \cdot f_{\varkappa-1}(a) - f_\varkappa(a)$$

ebenfalls gleich Null. Auf diese Weise würde man finden

$$f_{\varkappa+1}(a)=0,\quad f_\varkappa(a)=0,\quad f_{\varkappa-1}(a)=0,\ldots f'(a)=0,\quad f(a)=0,$$

d. h. $x=a$ wäre eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$. Das widerstreitet aber der Voraussetzung.

Aus der Gleichung

$$f_{\varkappa-1}(x)=Q_\varkappa(x)\cdot f_\varkappa(x)-f_{\varkappa+1}(x) \tag{7.}$$

folgt daher, wenn $f_\varkappa(a)=0$ ist,

$$f_{\varkappa-1}(a)=-f_{\varkappa+1}(a). \tag{8.}$$

Man kann jetzt h so klein nehmen, daß $f_{\varkappa-1}(a\pm h)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $f_{\varkappa-1}(a)$, und daß $f_{\varkappa+1}(a\pm h)$ dasselbe Vorzeichen hat wie $f_{\varkappa+1}(a)$. Jetzt haben, wenn man mit z das Vorzeichen von $f_\varkappa(a-h)$ und mit z' das Vorzeichen von $f_\varkappa(a+h)$ bezeichnet, nach Gleichung (8.) die Funktionen

			$f_{\varkappa-1}(x)$,	$f_\varkappa(x)$,	$f_{\varkappa+1}(x)$
für $x=a-h$	das	Vorzeichen	$\pm$	z	$\mp$
„ $x=a$	„	„	$\pm$	± 0	$\mp$
„ $x=a+h$	„	„	$\pm$	z'	$\mp$

Welche Vorzeichen z und z' auch sein mögen, es findet bei den drei aufeinanderfolgenden Funktionen $f_{\varkappa-1}(x)$, $f_\varkappa(x)$, $f_{\varkappa+1}(x)$ für die betrachteten Werte von x stets nur *ein* Zeichenwechsel statt, d. h. es kann in der Reihe der Funktionen

$$f_\mu,\quad f_{\mu-1}(x),\ \ldots f_3(x),\quad f_2(x),\quad f'(x),\quad f(x)$$

kein Zeichenwechsel verloren gehen, wenn x den Wert a passiert, für welchen $f_\varkappa(x)=0$ wird.

Werden für $x=a$ mehrere Funktionen der vorstehenden Reihe, welche „die *Sturm*sche Reihe" genannt wird, gleich Null, so kommt jede verschwindende Funktion zwischen zwei nicht verschwindende, so daß in der ganzen Reihe kein Zeichenwechsel verloren gehen kann.

Nur wenn $f(x)$ selbst für $x=a$ verschwindet, verhält sich die Sache anders. Dann wird nach Voraussetzung $f'(a)\gtrless 0$, und man kann h so klein machen, daß $f'(x)$ das Zeichen nicht wechselt, wenn x das Intervall von $a-h$ bis $a+h$ durchläuft. Dagegen wird nach dem *Taylor*schen Lehrsatze (vgl. Formel Nr. 91 der Tabelle)

$$(9.)\quad \begin{cases} f(a-h) = f(a) - h[f'(a) + \alpha_1] = -h[f'(a) + \alpha_1], \\ f(a+h) = f(a) + h[f'(a) + \alpha_2] = +h[f'(a) + \alpha_2], \end{cases}$$

wobei $f'(a) + \alpha_1$ und $f'(a) + \alpha_2$ dasselbe Zeichen haben wie $f'(a)$. Deshalb haben die Funktionen

		$f(x)$	und	$f'(x)$
für	$x = a - h$ das Zeichen	$\pm$		$\mp$
und	„ $x = a + h$ „ „	$\mp$		$\mp$

Hier geht also wirklich ein Zeichenwechsel verloren. Das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung ist daher folgendes:

Alle Werte von x, für welche eine der Funktionen

$$f_\mu, \quad f_{\mu-1}(x), \ldots f_3(x), \quad f_2(x), \quad f'(x), \quad f(x)$$

zwischen x_1 und x_2 verschwindet, seien in steigender Ordnung $a, b, c, \ldots k, l$, dann wechselt in den Intervallen von

$$x_1 \text{ bis } a, \quad a \text{ bis } b, \quad b \text{ bis } c, \ldots k \text{ bis } l, \quad l \text{ bis } x_2$$

keine dieser Funktionen das Zeichen, es kann also kein Zeichenwechsel verloren gehen, wenn x eines dieser Intervalle durchläuft.

Durchläuft aber x die Intervalle von $a - h$ bis $a + h$, $b - h$ bis $b + h, \ldots l - h$ bis $l + h$, so wird nur dann ein Zeichenwechsel verloren gehen, wenn a oder $b, \ldots$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ selbst ist. Daraus folgt der

Satz. *Die Gleichung $f(x) = 0$ hat in dem Intervalle von x_1 bis x_2 genau so viele Wurzeln, wie die Reihe*

$$f_\mu, \quad f_{\mu-1}(x), \ldots f_3(x_1), \quad f_2(x_1), \quad f'(x_1), \quad f(x_1)$$

Zeichenwechsel mehr hat als die Reihe

$$f_\mu, \quad f_{\mu-1}(x_2), \ldots f_3(x_2), \quad f_2(x_2), \quad f'(x_2), \quad f(x_2).$$

Beispiel. Wieviel reelle Wurzeln hat die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$$

in dem Intervalle von 1 bis 6?

Auflösung. Hier ist

$$f'(x) = 4x^3 - 42x^2 + 142x - 154,$$

$$Q_1(x) = \frac{x}{4} - \frac{7}{8}, \quad 4f_2(x) = 5x^2 - 35x + 59,$$

$$Q_2(x) = \frac{16x}{5} - \frac{56}{5}, \quad 5f_3(x) = 16x - 56,$$

$$Q_3(x) = \frac{25x}{64} - \frac{175}{128}, \quad 16f_4 = 9.$$

Deshalb wird

$$16f_4 = 9,\ 5f_3(1) = -40,\ 4f_2(1) = +29,\ f'(1) = -50,\ f(1) = +24,$$
$$16f_4 = 9,\ 5f_3(6) = +40,\ 4f_2(6) = +29,\ f'(6) = +50,\ f(6) = +24.$$

Die erste Reihe hat vier Zeichenwechsel, während in der zweiten Reihe kein Zeichenwechsel auftritt; es gehen also vier Zeichenwechsel verloren, wenn x das Intervall von 1 bis 6 durchläuft, d. h. die Gleichung 4ten Grades hat vier reelle Wurzeln, die zwischen 1 und 6 liegen.

§ 123.

Die *Newton*schen Näherungsformeln.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 208.)

Durch die in den vorhergehenden Paragraphen angegebenen Methoden kann man nicht nur die Anzahl der reellen Wurzeln genau bestimmen, sondern man kann auch durch Einsetzen von Zahlenwerten Werte von x finden, die den reellen Wurzelwerten ziemlich nahe liegen. Unterscheidet sich z. B. die Zahl a von einer Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ nur um eine kleine Größe h, so ist nach der *Taylor*schen Reihe

$$(1.) \qquad f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots = 0.$$

Da $\frac{f''(x)}{2!}h^2$ und die folgenden Glieder für hinreichend kleine Werte von h sehr klein werden, so kann man sie, ohne einen großen Fehler zu begehen, vernachlässigen. Deshalb findet man aus Gleichung (1.) näherungsweise

$$(2.) \qquad f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h = 0, \quad \text{oder} \quad h = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

folglich ist

$$(3.) \qquad a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

ein zweiter Näherungswert, der unter gewissen Bedingungen dem wahren Werte von x näher liegt als a. Einen dritten Näherungswert findet man dann durch die Gleichung

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}. \tag{4.}$$

Indem man dieses Verfahren, welches „die *Newton*sche Näherungsmethode" genannt wird, fortsetzt, kann man sich dem wahren Werte von x beliebig nähern.

Einen solchen ersten Näherungswert a wird man am leichtesten finden, indem man die Kurve

$$y = f(x)$$

durch Berechnung der Koordinaten einer Reihe von Punkten zeichnet und die Abszissen der Schnittpunkte aus der Zeichnung näherungsweise bestimmt.

Die *Newton*schen Näherungsformeln führen aber nur dann zum Ziele, wenn $\frac{f''(a)}{2!}h^2$ und die folgenden Glieder in Gleichung (1.) wirklich sehr klein sind. Deshalb hat *Fourier* die *Newton*sche Methode noch in der folgenden Weise verbessert.

Man bestimme zwei Zahlen a und b so, daß zwischen a und b nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt, und daß die Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ in diesem Intervalle keine Wurzel haben. Dann müssen $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetztes Zeichen haben, weil $f(x)$ für einen Wert von x zwischen a und b verschwindet. Dagegen hat $f'(a)$ mit $f'(b)$, und ebenso hat $f''(a)$ mit $f''(b)$ gleiches Zeichen. Deshalb sind in bezug auf die Vorzeichen von $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ vier Fälle zu unterscheiden. Diesen vier Fällen entsprechen die Figuren 140 bis 143, in denen

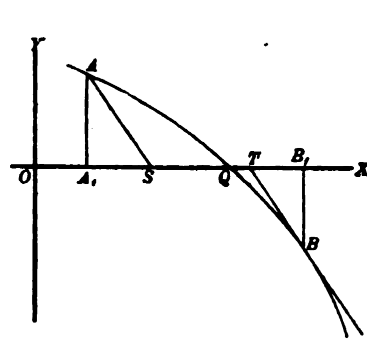
$$OA_1 = a, \quad OB_1 = b, \quad OQ = x$$

sein möge. In den Figuren 140 und 141 schneidet die Tangente des Kurvenpunktes B die X-Achse im Punkte T, und durch den Kurvenpunkt A ist eine Parallele AS zu TB gelegt; in den Figuren 142 und 143 schneidet die Tangente des Kurvenpunktes A die X-Achse im Punkte T,

und durch den Kurvenpunkt B ist eine Parallele BS zu TA gelegt.

Fig. 140.

Fig. 141.



Im Falle I (Fig. 140) ist

$$f(a) < 0, \quad f'(a) > 0, \quad f''(a) > 0,$$
$$f(b) > 0, \quad f'(b) > 0, \quad f''(b) > 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Negativen ins Positive und ist nach oben konkav.

Im Falle II (Fig. 141) ist

$$f(a) > 0, \quad f'(a) < 0, \quad f''(a) < 0,$$
$$f(b) < 0, \quad f'(b) < 0, \quad f''(b) < 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Positiven ins Negative und ist nach oben konvex.

Fig. 142.

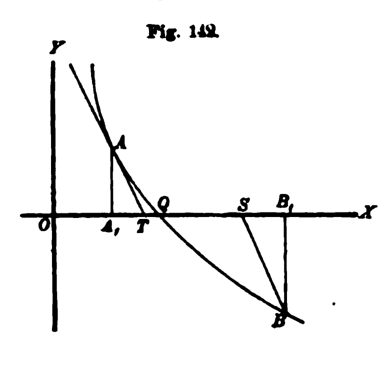
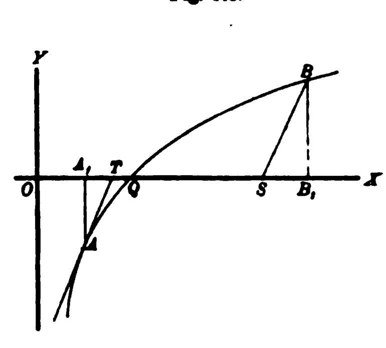


Fig. 143.



Im Falle III (Fig. 142) ist

$$f(a) > 0, \quad f'(a) < 0, \quad f''(a) > 0,$$
$$f(b) < 0, \quad f'(b) < 0, \quad f''(b) > 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Positiven ins Negative und ist nach oben konkav.

Im Falle IV (Fig. 143) ist

$$f(a) < 0,\quad f'(a) > 0,\quad f''(a) < 0,$$
$$f(b) > 0,\quad f'(b) > 0,\quad f''(b) < 0,$$

d. h. die Kurve tritt aus dem Negativen ins Positive und ist nach oben konvex.

Der konvexe Teil der Kurve ist demnach in den Fällen I und II der Ordinate B_1B und in den Fällen III und IV der Ordinate A_1A zugewendet. Deshalb heißt nach *Fourier* in den Fällen I und II der Wert b und in den Fällen III und IV der Wert a „die äußere Grenze“. Man beachte, daß in den Fällen I und II $f'(a)$ und $f''(a)$ *gleiches*, und in den Fällen III und IV *entgegengesetztes* Zeichen haben.

Im Falle I setze man

$$x = b - (b - x) = OQ, \tag{5.}$$

dann wird nach Formel Nr. 88 der Tabelle, wenn man a mit b vertauscht,

$$f(x) = f(b) - (b - x)f'(\xi) = 0, \tag{6.}$$

wo $\xi = b - \Theta(b - x)$ zwischen x und b liegt. Daraus folgt

$$b - x = \frac{f(b)}{f'(\xi)},\quad \text{oder}\quad x = b - \frac{f(b)}{f'(\xi)}. \tag{7.}$$

Da in dem betrachteten Intervalle $f''(x) > 0$ ist, so wird

$$f'(b) > f'(\xi) > 0,\quad \text{also}\quad 0 < \frac{f(b)}{f'(b)} < \frac{f(b)}{f'(\xi)}. \tag{8}$$

Dies gibt

$$x = b - \frac{f(b)}{f'(\xi)} < b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b' < b. \tag{9.}$$

Die Zahl $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ liegt also zwischen x und b, d. h. sie liegt dem wahren Werte der Wurzel näher als b.

Setzt man

$$x = a + (x - a), \tag{10.}$$

so findet man in ähnlicher Weise nach Formel Nr. 88 der Tabelle

(11.) $$f(x) = f(a) + (x - a)f'(\eta) = 0,$$
wo $\eta = a + \Theta(x - a)$ zwischen a und x liegt. Dies gibt

(12.) $$x - a = -\frac{f(a)}{f'(\eta)}, \quad \text{oder} \quad x = a - \frac{f(a)}{f'(\eta)}.$$

Da in dem betrachteten Intervalle $f''(x) > 0$ ist, und da $f(a) < 0$ ist, so wird

(13.) $$0 < f'(\eta) < f'(b), \quad \text{also} \quad \frac{-f(a)}{f'(\eta)} > \frac{-f(a)}{f'(b)},$$
folglich ist

(14.) $$x = a - \frac{f(a)}{f'(\eta)} > a - \frac{f(a)}{f'(b)} = a' > a.$$

Man findet also

(15.) $$a < a' < x < b' < b.$$

Diese Untersuchung läßt sich in folgender Weise geometrisch deuten. Die Tangente im Punkte B (Fig. 140) hat die Gleichung

(16.) $$y' - f(b) = f'(b)(x' - b);$$
für den Schnittpunkt T dieser Tangente mit der X-Achse findet man
$$x' = OT, \quad y' = 0, \quad \text{also} \quad -f(b) = f'(b)(OT - b),$$
oder

(17.) $$OT = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b'.$$

Ferner hat die Gerade AS, welche zur Tangente TB parallel gezogen ist, die Gleichung

(18.) $$y' - f(a) = f'(b)(x' - a).$$

Für den Schnittpunkt S dieser Geraden mit der X-Achse findet man
$$x' = OS, \; y' = 0, \quad \text{also} \quad -f(a) = f'(b)(OS - a),$$
oder

(19.) $$OS = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = a'.$$

Gleichzeitig erkennt man, daß das Intervall zwischen a' und b' wesentlich kleiner ist als das Intervall zwischen a und b.

Indem man dieses Verfahren weiter fortsetzt, findet man

$$(20.)\quad \begin{cases} a'' = a' - \dfrac{f(a')}{f'(b')}, & b'' = b' - \dfrac{f(b')}{f'(b')}, \\ a''' = a'' - \dfrac{f(a'')}{f'(b'')}, & b''' = b'' - \dfrac{f(b'')}{f'(b'')}, \\ \dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

Die einzelnen Intervalle

$$(21.)\quad k = b - a,\ k' = b' - a',\ k'' = b'' - a'', \dots k^{(p)} = b^{(p)} - a^{(p)}$$

werden immer kleiner und nähern sich schließlich dem Werte 0 beliebig. Nach den Gleichungen (17.) und (19.) ist nämlich

$$(22.)\quad k' = b' - a' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - a + \frac{f(a)}{f'(b)} = k - \frac{f(b) - f(a)}{f'(b)}.$$

Nach der *Taylor*schen Reihe wird aber

$$f(x) - f(b) = (x - b)f'(b) + \frac{(x - b)^2}{2} f''[b + \Theta(x - b)],$$

also für $x = a$

$$(23.)\quad f(a) - f(b) = -kf'(b) + \frac{k^2}{2} f''(\zeta),$$

wo $\zeta = b + \Theta(a - b) = b - \Theta k$ zwischen a und b liegt. Deshalb geht Gleichung (22.) über in

$$(24.)\quad k' = k - k + \frac{k^2 f''(\zeta)}{2f'(b)} = \frac{k^2 f''(\zeta)}{2f'(b)}.$$

Bezeichnet man mit G den größten Wert, den $f''(x)$ in dem Intervalle von a bis b annimmt, und setzt

$$(25.)\quad \frac{G}{2f'(a)} = C,$$

so wird

$$f''(\zeta) \leqq G,\ f'(a) < f'(b), \quad \text{also} \quad k' \leqq \frac{k^2 G}{2f'(b)} < \frac{k^2 G}{2f'(a)},$$

oder

$$(26.)\quad k' < C \,.\, k^2.$$

Ebenso findet man

$$k'' \leqq \frac{k'^2 \,.\, G}{2f'(b')} < \frac{k'^2 \,.\, G}{2f'(a)} < C \,.\, k'^2 < C^3 \,.\, k^4,$$

$$k''' > C \,.\, (k'')^2 < C^7 \,.\, k^8,\ k^{(4)} < C \,.\, (k''')^2 < C^{15} \,.\, k^{16}, \dots.$$

Man erkennt, daß die Annäherung eine sehr starke wird, wenn $C.k < 1$ ist.

Dieselben Formeln, welche für den Fall I hergeleitet sind, gelten auch für den Fall II, wie man leicht zeigen kann.

Für die Fälle III und IV, bei denen a die äußere Grenze ist, erhält man brauchbare Resultate, wenn man in den Gleichungen (17.), (19.) und (20.) $a, a', a'', \dots$ bezw. mit $b, b', b'', \dots$ vertauscht; man hat also zu setzen:

$$\text{(27.)} \quad \begin{cases} a' = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, & b' = b - \dfrac{f(b)}{f'(a)}, \\ a'' = a' - \dfrac{f(a')}{f'(a')}, & b'' = b' - \dfrac{f(b')}{f'(a')}, \\ \dots\dots\dots\dots & \end{cases}$$

Hier haben $f'(a)$ und $f''(a)$ entgegengesetztes Zeichen.

Macht man noch die Voraussetzung, daß $f'''(x)$ zwischen a und b nicht verschwindet, so ist G entweder $f''(a)$ oder $f''(b)$; dann kann man die Zahl C für alle vier Fälle durch die Gleichung

$$\text{(28.)} \qquad C = \frac{G}{2K}$$

erklären, wo K die kleinere von den beiden Größen $f'(a)$ und $f'(b)$ und G die größere von den beiden Größen $f''(a)$ und $f''(b)$ ist. Es gelten dann für alle vier Fälle die Ungleichungen

$$\text{(29.)} \quad b - a = k, \quad k' < C.k^2, \quad k'' < C^3.k^4, \quad k''' < C^7.k^8, \dots.$$

Ist $C.k < 1$, so braucht man nur die Näherungswerte an der äußeren Grenze zu berechnen, denn aus den Ungleichungen (29.) ergibt sich, wie groß der Fehler höchstens sein kann.

Beispiel. Man soll die Wurzeln der Gleichnng

$$\text{(30.)} \qquad f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 5 = 0$$

ermitteln.

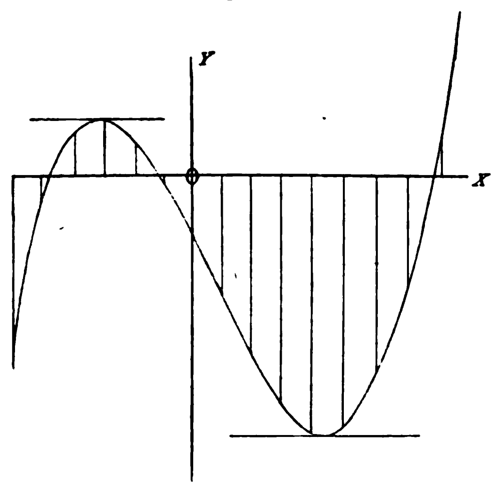
Auflösung. Zunächst zeichne man die Kurve, welche der Gleichung

$$\text{(31.)} \qquad y = \frac{1}{5}(x^3 - x^2 - 10x - 5)$$

entspricht; dann sind die Abszissen der Schnittpunkte dieser Kurve mit der X-Achse die Wurzeln der Gleichung (30.). Dabei ist der Faktor $\frac{1}{5}$ vor der Klammer noch willkürlich und nur hinzugefügt, damit die Kurve nicht zu große Dimensionen in der Richtung von oben nach unten erhält, und damit man die Abszissen der Schnittpunkte mit größerer Sicherheit abmessen kann. Zur Konstruktion der Kurve genügen die Koordinaten weniger Punkte, und zwar wird



Fig. 144.



$y = -2{,}2$	für $x = -3,$	$y = -1{,}681$	für $x = +0{,}333,$
$y = -0{,}375$	„ $x = -2{,}5,$	$y = -3$	„ $x = +1,$
$y = +0{,}6$	„ $x = -2,$	$y = -4{,}238$	„ $x = +2{,}189,$
$y = +0{,}875$	„ $x = -1{,}523,$	$y = -3{,}4$	„ $x = +3,$
$y = +0{,}6$	„ $x = -1,$	$y = -1{,}875$	„ $x = +3{,}5,$
$y = -0{,}075$	„ $x = -0{,}5,$	$y = +0{,}6$	„ $x = +4,$
$y = -1$	„ $x = 0,$	$y = +4{,}375$	„ $x = +4{,}5.$

Aus Gleichung (30.) folgt

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 10, \quad f''(x) = 6x - 2, \quad f'''(x) = 6. \tag{32.}$$

Deshalb wird y ein Maximum für

$$x = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{31}) = -1{,}523$$

und ein Minimum für

$$x = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{31}) = +2{,}189,$$

weil $f'(x)$ für diese Werte von x gleich Null wird. Für

$$x = 0{,}333$$

erhält man, weil $f''(x)$ gleich Null wird, einen Wendepunkt.

Aus der Zeichnung findet man leicht, namentlich wenn man einen etwas größeren Maßstab anwendet, daß die drei Wurzeln der Gleichung (30.) bezw. in den Intervallen

$$\begin{array}{lrlr} \text{von} & -2{,}4 & \text{bis} & -2{,}3, \\ \text{„} & -0{,}6 & \text{„} & -0{,}5 \\ \text{und „} & +3{,}8 & \text{„} & +4{,}0 \end{array}$$

liegen, und kann dann die Werte der drei Wurzeln bis auf vier Dezimalstellen genau in folgender Weise finden:

Indem man beim Einsetzen der Zahlwerte das in § 122 angegebene Schema benutzt, findet man zunächst für $a = -2{,}4$ und $b = -2{,}3$

$$(33.)\quad \begin{cases} f(a) = -0{,}584,\ f'(a) = +12{,}08,\ f''(a) = -16{,}4,\ f'''(a) = 6, \\ f(b) = +0{,}543,\ f'(b) = +10{,}47,\ f''(b) = -15{,}8,\ f'''(b) = 6. \end{cases}$$

Hier tritt also Fall IV ein; deshalb wird

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -2{,}4 + \frac{0{,}584}{12{,}08} = -2{,}4 + 0{,}04834 = -2{,}351\,66,$$

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)} = -2{,}3 - \frac{0{,}543}{12{,}08} = -2{,}3 - 0{,}044\,95 = -2{,}344\,95.$$

Um die fernere Rechnung zu vereinfachen, setze man

$$(34.)\qquad a' = -2{,}352, \quad b' = -2{,}344.$$

Dies ist erlaubt, weil man a' etwas *kleiner* und b' etwas *größer* annimmt als die bereits gefundenen Näherungswerte. Jetzt wird

$$(35.)\ f(a') = -0{,}022\,942,\ f(b') = +0{,}066\,940,\ f'(a') = 11{,}299\,712,$$

folglich ist

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')} = -2{,}352 + \frac{0{,}022\,942}{11{,}299\,712} = -2{,}349\,970,$$

$$b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')} = -2{,}344 - \frac{0{,}066\,940}{11{,}299\,712} = -2{,}349\,924.$$

Da x_1 zwischen a'' und b'', aber näher an a'' liegt, so setze man

$$x_1 = -2{,}349\,970. \tag{36.}$$

Der Fehler wird dann kleiner als $\frac{1}{2}(b'' - a'') = 0{,}000\,023$.

Für das zweite Intervall wird $a = -0{,}6$ und $b = -0{,}5$; dies gibt

$$\left\{\begin{array}{llll} f(a) = +0{,}424, & f'(a) = -7{,}72, & f''(a) = -5{,}6, & f'''(a) = 6, \\ f(b) = -0{,}375, & f'(b) = -8{,}25, & f''(b) = -5, & f'''(b) = 6. \end{array}\right. \tag{37.}$$

Hier tritt also Fall II ein; deshalb wird

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = -0{,}6 + \frac{0{,}424}{8{,}25} = -0{,}6 + 0{,}051\,394 = -0{,}548\,606,$$

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = -0{,}5 - \frac{0{,}375}{8{,}25} = -0{,}5 - 0{,}045\,455 = -0{,}545\,455.$$

Um die fernere Rechnung zu vereinfachen, setze man

$$a' = -0{,}549, \quad b' = -0{,}545, \tag{38.}$$

dann wird

$$f(a') = 0{,}023\,130, \quad f(b') = -0{,}008\,904, \quad f'(b') = -8{,}018\,925, \tag{39.}$$

folglich ist

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')} = -0{,}549 + \frac{0{,}023\,130}{8{,}018\,925} = -0{,}546\,116,$$

$$b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')} = -0{,}545 - \frac{0{,}008\,904}{8{,}018\,925} = -0{,}546\,110.$$

Da x_2 zwischen a'' und b'', aber näher an b'' liegt, so setze man

$$x_2 = -0{,}546\,110. \tag{40.}$$

Der Fehler wird dann kleiner als $\frac{1}{2}(b'' - a'') = 0{,}000\,003$.

Für das dritte Intervall wird $a = 3{,}8$ und $b = 4$; dies gibt

$$\left\{\begin{array}{llll} f(a) = -2{,}568, & f'(a) = +25{,}72, & f''(a) = +20{,}8, & f'''(a) = 6, \\ f(b) = +3, & f'(b) = +30, & f''(b) = +22, & f'''(b) = 6. \end{array}\right. \tag{41.}$$

Hier tritt also Fall I ein; deshalb wird

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = 3{,}8 + \frac{2{,}568}{30} = 3{,}8 + 0{,}0856 = 3{,}8856,$$

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 4{,}0 - \frac{3}{30} = 4{,}0 - 0{,}1 = 3{,}9.$$

Um die fernere Rechnung zu vereinfachen, setze man

$$(42.)\qquad a' = 3{,}885, \quad b' = 3{,}9,$$

dann wird

$$(43.)\quad f(a') = -0{,}306\,046, \quad f(b') = +0{,}109, \quad f'(b') = +27{,}83,$$

folglich ist

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(b')} = 3{,}885 + \frac{0{,}306\,046}{27{,}83} = 3{,}895\,997,$$

$$b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')} = 3{,}9 - \frac{0{,}109}{27{,}83} = 3{,}896\,083.$$

Da x_3 zwischen a'' und b'', aber näher an b'' liegt, so setze man

$$(44.)\qquad x_3 = 3{,}896\,083.$$

Der Fehler wird dann kleiner als $\frac{1}{2}(b'' - a'') = 0{,}000\,043$.

§ 124.

Näherungsmethode von *Graeffe*.

Sind in der Gleichung $f(x) = 0$ die absoluten Beträge der Wurzeln voneinander verschieden, und sind die absoluten Beträge der reellen Wurzeln größer als die der komplexen Wurzeln, so kann man zur Ermittelung der reellen Wurzeln das folgende Verfahren anwenden.

Durch Vertauschung von x mit $-x$ geht die Gleichung

$$(1.)\quad f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n) = 0$$

in

$$(2.)\quad f_1(x) = x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - + \cdots \mp a_{n-1}x \pm a_n$$
$$= (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)\cdots(x + x_n) = 0$$

über. Indem man die beiden Gleichungen (1.) und (2.) miteinander multipliziert, erhält man eine Gleichung

$$(3.)\quad x^{2n} + b_1x^{2n-2} + b_2x^{2n-4} + \cdots + b_{n-1}x^2 + b_n$$
$$= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\cdots(x^2 - x_n^2) = 0,$$

wobei

$$(4.)\quad \begin{cases} b_1 = 2a_2 - a_1^2, \\ b_2 = 2a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2, \\ b_3 = 2a_6 - 2a_1a_5 + 2a_2a_4 - a_3^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Am einfachsten findet man die Koeffizienten der Gleichung (3.), wenn man $f(x)$ auf die Form

$$(1a.)\quad f(x) = (x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \cdots) + (a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + \cdots) = A + B$$

bringt, wobei

$$A = x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \cdots,\quad B = a_1x^{n-1} + a_3x^{n-3} + \cdots$$

ist, dann wird

$$(2a.)\quad f_1(x) = A - B = 0$$

und

$$(3a.)\quad f(x) \cdot f_1(x) = A^2 - B^2 = 0.$$

Indem man $x^2 = y$ setzt, geht Gleichung (3.) über in

$$(5.)\quad g(y) = y^n + b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} + \cdots + b_{n-1}y + b_n = (y - x_1^2)(y - x_2^2)(y - x_3^2)\ldots(y - x_n^2) = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$(6.)\quad (-1)^n g(-y) = y^n - b_1y^{n-1} + b_2y^{n-2} - + \cdots \mp b_{n-1}y \pm b_n = (y + x_1^2)(y + x_2^2)(y + x_3^2)\ldots(y + x_n^2) = 0$$

und setzt $y^2 = z$, so erhält man die Gleichung

$$(7.)\quad z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} + \cdots + c_{n-1}z + c_n = (z - x_1^4)(z - x_2^4)(z - x_3^4)\ldots(z - x_n^4) = 0.$$

Dieses Verfahren kann man beliebig fortsetzen und findet, wenn man die Zahl 2^α mit μ bezeichnet, schließlich eine Gleichung

$$(8.)\quad w^n + p_1w^{n-1} + p_2w^{n-2} + \cdots + p_{n-1}w + p_n = 0$$

mit den Wurzeln $x_1^\mu, x_2^\mu, x_3^\mu, \ldots x_n^\mu$.

Sind alle Wurzeln reell, und ist

$$(9.)\quad x_1^2 > x_2^2 > x_3^2 > \cdots > x_n^2,$$

so wird nach den Ausführungen in § 115

$$(10.)\quad -p_1 = x_1^\mu + x_2^\mu + x_3^\mu + \cdots + x_n^\mu = x_1^\mu\left[1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\mu + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^\mu + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^\mu\right] = x_1^\mu(1 + \varepsilon_1),$$

$$(11.)\quad +p_2 = x_1^\mu x_2^\mu + x_1^\mu x_3^\mu + \cdots + x_2^\mu x_3^\mu + \cdots + x_3^\mu x_4^\mu + \cdots$$
$$= x_1^\mu x_2^\mu \left[1 + \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^\mu + \cdots + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^\mu + \cdots + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^\mu \left(\frac{x_4}{x_2}\right)^\mu + \cdots\right]$$
$$= x_1^\mu x_2^\mu (1 + \varepsilon_2),$$

$$(12.)\quad -p_3 = x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu + x_1^\mu x_2^\mu x_4^\mu + \cdots$$
$$= x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu \left[1 + \left(\frac{x_4}{x_3}\right)^\mu + \cdots\right] = x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu (1 + \varepsilon_3),$$

. . . .

$$(13.)\quad \pm p_n = x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu \ldots x_n^\mu.$$

Nun sind aber nach Voraussetzung die Größen

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2, \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2, \cdots \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^2, \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2, \cdots \left(\frac{x_n}{x_2}\right)^2, \cdots \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^2$$

lauter echte Brüche, deren Potenzen man beliebig klein machen kann, wenn man nur den Exponenten hinreichend groß macht. Deshalb kann man auch die Größen ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ beliebig klein machen und findet mit beliebiger Annäherung

$$(14.)\quad -p_1 = x_1^\mu, \quad +p_2 = x_1^\mu x_2^\mu, \quad -p_3 = x_1^\mu x_2^\mu x_3^\mu, \quad \cdots \pm p_n = x_1^\mu x_2^\mu \ldots x_n^\mu.$$

Daraus folgt näherungsweise

$$(15.)\quad x_1^\mu = -p_1, \quad x_2^\mu = -\frac{p_2}{p_1}, \quad x_3^\mu = -\frac{p_3}{p_2}, \quad \cdots x_n = -\frac{p_n}{p_{n-1}},$$

oder

$$(16.)\quad \begin{cases} \log(\pm x_1) = \frac{1}{\mu} \log(-p_1), \\ \log(\pm x_2) = \frac{1}{\mu} [\log p_2 - \log(-p_1)], \\ \log(\pm x_3) = \frac{1}{\mu} [\log(-p_3) - \log p_2], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \log(\pm x_n) = \frac{1}{\mu} [\log(\pm p_n) - \log(\mp p_{n-1})]. \end{cases}$$

Beispiel. Man soll die Wurzeln der Gleichung

$$(17.)\quad f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 5 = 0$$

berechnen.

Auflösung. Mit Hilfe des *Sturm*schen Satzes kann man leicht nachweisen, daß die Gleichung zwei negative und eine positive reelle Wurzel hat, daß also das vorher angegebene Verfahren anwendbar ist. Aus

$$(x^3 - 10x)^2 - (x^2 + 5)^2 = 0$$

folgt dann die Gleichung

$$(18.)\qquad y^3 - 21y^2 + 90y - 25 = 0, \quad \text{wo} \quad y = x^2.$$

Ferner folgt aus

$$(y^3 + 90y)^2 - (21y^2 + 25)^2 = 0$$

$$(19.)\qquad z^3 - 261z^2 + 7050z - 625 = 0, \quad \text{wo} \quad z = y^2 = x^4.$$

Aus

$$(z^3 + 7050z)^2 - (261z^2 + 625)^2 = 0$$

folgt die Gleichung

$$(20.)\qquad w^3 - 54\,021w^2 + 49\,376\,250w - 390\,625 = 0,$$

$$\text{wo} \quad w = z^2 = y^4 = x^8.$$

Deshalb wird

$$\log(\pm x_1) = \frac{1}{8}\log 54\,021 = 4{,}732\,562\,6 : 8 = 0{,}591\,570\,3,$$

$$\log(\pm x_2) = \frac{1}{8}[\log 49\,376\,250 - \log 54\,021]$$

$$= (7{,}693\,518\,1 - 4{,}732\,562\,6) : 8$$

$$= 2{,}960\,955\,5 : 8 = 0{,}370\,119\,4,$$

$$\log(\pm x_3) = \frac{1}{8}[\log 390\,625 - \log 49\,376\,250]$$

$$= (5{,}591\,760\,1 - 7{,}693\,518\,1) : 8$$

$$= (5{,}898\,242\,0 - 8) : 8 = 0{,}737\,280\,3 - 1.$$

Daraus folgt

$$(21.)\qquad \begin{cases} x_1 = \pm\, 3{,}904\,544, \\ x_2 = \pm\, 2{,}344\,874, \\ x_3 = \pm\, 0{,}546\,110. \end{cases}$$

Da $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ist, so muß $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 < 0$ sein. Aus der Vergleichung dieser Näherungswerte mit den in § 123 für die Wurzeln derselben Gleichung gefundenen

Werten erkennt man, daß die Annäherung eine ziemlich starke ist.

Der große Mangel dieser Methode liegt darin, daß man zwar die Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann, daß man aber für den Fehler keine zuverlässige Grenze angeben kann. Man wird daher im allgemeinen zunächst die *Graeffe*sche Methode benutzen, um für die Wurzeln Näherungswerte zu finden, und dann die Methode von *Newton* und *Fourier* anwenden, wenn es darauf ankommt, bei der Berechnung eine bestimmte Genauigkeit zu erzielen.

Sind auch komplexe Wurzeln vorhanden, so kann man die Methode von *Graeffe* noch zur Berechnung der reellen Wurzeln anwenden, deren absoluter Betrag größer ist als der absolute Betrag der komplexen Wurzeln.

Nach den Ausführungen in § 114 treten die komplexen Wurzeln paarweise auf. Ist z. B.

$$x_\varkappa = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{22.}$$

eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so hat die Gleichung noch eine zweite Wurzel von der Form

$$x_\lambda = r(\cos\varphi - i\sin\varphi). \tag{23.}$$

Dies gibt

$$\begin{aligned} x_\varkappa^\mu + x_\lambda^\mu &= r^\mu[\cos(\mu\varphi) + i\sin(\mu\varphi)] + r^\mu[\cos(\mu\varphi) - i\sin(\mu\varphi)] \\ &= 2r^\mu\cos(\mu\varphi). \end{aligned} \tag{24.}$$

Hat jetzt die reelle Wurzel x_1 unter allen Wurzeln den größten absoluten Betrag, so kann man in der Gleichung

$$-p_1 = x_1^\mu\left[1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\mu + \cdots + \frac{2r^\mu\cos(\mu\varphi)}{x_1^\mu} + \cdots\right] = x_1^\mu(1 + \varepsilon_1)$$

die Größe ε_1 für hinreichend große Werte von μ wieder beliebig klein machen, so daß man mit beliebiger Annäherung

$$x_1 = \pm\sqrt[\mu]{-p_1} \tag{25.}$$

erhält.

Ebenso kann man die Methode von *Graeffe* zur angenäherten Berechnung derjenigen reellen Wurzeln be-

nutzen, deren absoluter Betrag kleiner ist als der absolute Betrag der komplexen Wurzeln, denn man kann diesen Fall auf den vorstehenden zurückführen, indem man $x = \frac{1}{t}$ setzt. Dann entsprechen den gesuchten Wurzeln diejenigen reellen Wurzeln in der Gleichung

$$t^n f\left(\frac{1}{t}\right) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + 1 = 0, \tag{26.}$$

deren absoluter Betrag größer ist als der absolute Betrag der komplexen Wurzeln.

Man kann die Methode von *Graeffe* sogar so verallgemeinern, daß sie für die angenäherte Berechnung der komplexen Wurzeln geeignet wird. Die Auseinandersetzung des dazu erforderlichen Verfahrens würde aber hier zu weit führen.

XVI. Abschnitt.

Asymptoten einer Kurve.

§ 125.

Richtung der Asymptoten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 209.)

Erklärung. Eine Tangente, deren Berührungspunkt unendlich fern liegt, heißt eine „*Asymptote*“ der Kurve.

In diesem Falle ist Formel Nr. 144 der Tabelle, welche die Gleichung der Tangente angibt, nämlich

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

nicht mehr anwendbar, weil in dieser Gleichung x und y (oder wenigstens die eine von diesen beiden Größen) unendlich groß werden. Auch kann die Differentiation von y nach x in diesem Falle nicht mehr ausgeführt werden. Dagegen führen die in Abschnitt XIV ausgeführten algebraischen Untersuchungen zum Ziele.

Dabei möge die Bestimmung der Asymptoten einer Kurve mit der Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{1.}$$

auf den Fall beschränkt werden, wo $F(x, y)$ eine *ganze rationale* Funktion n^{ten} Grades ist, obgleich die meisten Schlüsse und Ergebnisse der hier folgenden Untersuchung auch dann noch richtig bleiben, wenn diese Beschränkung aufgehoben wird.

Zunächst beachte man, daß die Asymptote eine gerade Linie ist, deren Gleichung die Form

(2.) $$Ax' + By' + C = 0$$

haben muß. Ist $B \gtrless 0$, so erhält man hieraus

(2a.) $$y' = mx' + \mu,$$

und ist $A \gtrless 0$, so erhält man

(2b.) $$x' = ly' + \lambda,$$

wobei

(3.) $$m = -\frac{A}{B}, \quad l = -\frac{B}{A} = \frac{1}{m}$$

ist. Wird $B = 0$, so ist die Gerade parallel zur Y-Achse und hat die Gleichung

$$x' = \lambda,$$

während die Gleichung (2a.) nicht benutzt werden kann. Wird $A = 0$, so ist die Gerade parallel zur X-Achse und hat die Gleichung

$$y' = \mu,$$

während die Gleichung (2b.) nicht benutzt werden kann.

Damit die Gerade (2a.) oder (2b.) durch den Kurvenpunkt P mit den Koordinaten x und y hindurchgeht, muß

$$y = mx + \mu \quad \text{und} \quad x = ly + \lambda,$$

oder

(4.) $$m = \frac{y}{x} - \frac{\mu}{x} \quad \text{und} \quad l = \frac{x}{y} - \frac{\lambda}{y}$$

sein, wobei zunächst angenommen ist, daß der Punkt P im Endlichen liegt. Rückt aber P ins Unendliche, so wird

(4a.) $$m = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x} - \frac{\mu}{x}\right) = \lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right),$$

(4b.) $$l = \lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y} - \frac{\lambda}{y}\right) = \lim_{y=\infty}\left(\frac{x}{y}\right).$$

Um nun die Größen $\lim\left(\frac{y}{x}\right)$ bezw. $\lim\left(\frac{x}{y}\right)$ zu berechnen, beachte man, daß x und y die Koordinaten eines *Kurven*punktes sind, daß man also die Werte von $\frac{y}{x}$ und $\frac{x}{y}$ aus der Gleichung der Kurve, nämlich aus

$$F(x, y) = 0$$

berechnen muß. Zu diesem Zwecke ordne man $F(x, y)$ so, daß

$$F(x, y) = U_n + U_{n-1} + \cdots + U_1 + U_0 = 0 \tag{5.}$$

wird, wobei

$$U_n = ay^n + a_1 xy^{n-1} + a_2 x^2 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} y + a_n x^n$$

alle Glieder der n^{ten} Dimension,

$$U_{n-1} = by^{n-1} + b_1 xy^{n-2} + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}$$

alle Glieder der $(n-1)^{\text{ten}}$ Dimension,

. . . .

$$U_1 = ky + k_1 x$$

die Glieder der ersten Dimension enthält, und U_0 eine Konstante ist.

Dividiert man jetzt beide Seiten der Gleichung (5.) durch x^n, so wird

$$\frac{F(x, y)}{x^n} = \frac{U_n}{x^n} + \frac{U_{n-1}}{x^n} + \cdots + \frac{U_1}{x^n} + \frac{U_0}{x^n} = 0.$$

Dabei ist

$$\frac{U_n}{x^n} = a\left(\frac{y}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + a_n \tag{6.}$$

nur noch von $\frac{y}{x}$ abhängig. Dagegen wird

$$\frac{U_{n-1}}{x^n} = \frac{1}{x}\left[b\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + b_1\left(\frac{y}{x}\right)^{n-2} + b_2\left(\frac{y}{x}\right)^{n-3} + \cdots + b_{n-1}\right]. \tag{7.}$$

Läßt man jetzt x unendlich groß werden, so ist

$$\lim\left(\frac{y}{x}\right) = m, \tag{8.}$$

und wenn m eine endliche Größe ist,

$$\lim \frac{U_{n-1}}{x^n} = 0.$$

Ebenso werden die Größen $\lim \frac{U_{n-2}}{x^n}$, $\cdots \lim \frac{U_1}{x^n}$, $\lim \frac{U_0}{x^n}$ gleich 0, so daß sich die Gleichung (5.) bei der Ausführung der angegebenen Operationen auf

$$\lim \frac{U_n}{x^n} = am^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0 \tag{9.}$$

reduziert.

Die n Wurzeln dieser Gleichung entsprechen n Richtungen, in denen unendlich ferne Punkte der Kurve liegen.

*Eine Kurve n^{ten} Grades hat daher n unendlich ferne Punkte und deshalb auch n Asymptoten, von denen aber einige imaginär sein können, dem Umstande entsprechend, daß die Gleichung (9.) imaginäre Wurzeln haben kann.**)

Wenn in Gleichung (9.) der Koeffizient von m^n, nämlich a, gleich 0 wird, so reduziert sich der Grad der Gleichung (9.) und somit auch die Anzahl ihrer Wurzeln, nicht aber die Anzahl der Asymptoten. Es wurde ja schon vorher darauf hingewiesen, daß die Gleichungsform

$$y' = mx' + \mu$$

für die Asymptoten nicht immer verwendbar sei. Dieser Fall tritt ein, wenn a gleich 0 ist.

Dividiert man nämlich die Gleichung (5.) durch y^n, läßt dann y unendlich groß werden und beachtet, daß $\lim\left(\frac{x}{y}\right) = l$ ist, so erhält man

$$\text{(10.)} \quad \lim_{y=\infty} \frac{U_n}{y^n} = a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + a_{n-2} l^{n-2} + \cdots + a_1 l + a = 0.$$

Wird jetzt a gleich 0, so hat diese Gleichung die Wurzel

$$l = \frac{1}{m} = 0,$$

und die entsprechende Asymptote steht auf der X-Achse senkrecht. Ist auch a_1 gleich 0, so läßt sich in Gleichung (10.) auf der linken Seite der Faktor l^2 abtrennen, d. h. die Gleichung hat die Wurzel

$$l = 0$$

zweimal, so daß zwei Asymptoten auf der X-Achse senkrecht stehen. Usw.

---

*) Unter einer *imaginären* Wurzel soll hier im Gegensatz zu den *reellen* Wurzeln eine komplexe Größe von der Form $a + bi$ verstanden werden, bei der $b \gtrless 0$ ist.

§ 126.

Lage der Asymptoten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 209.)

Nachdem man im vorhergehenden Paragraphen aus der Gleichung (9.) einen Wert von m (oder aus der Gleichung (10.) einen Wert von l) bestimmt hat, kennt man erst die *Richtung* der Asymptote

$$y' = mx' + \mu, \quad \text{bezw.} \quad x' = ly' + \lambda;$$

um ihre Lage vollständig zu erhalten, muß man noch den zugehörigen Wert von μ (bezw. λ) aufsuchen.

Zu diesem Zwecke bestimme man die Punkte, in denen die Kurve von der Geraden geschnitten wird. Für die Koordinaten eines solchen Punktes gelten die Gleichungen

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad y = mx + \mu \tag{1.}$$

gemeinschaftlich, also auch die Gleichung

$$F(x, mx + \mu) = 0. \tag{2.}$$

Diese Gleichung enthält nur noch die *eine* Unbekannte x und läßt sich, da sie höchstens vom n^{ten} Grade ist, auf die Form

$$F(x, mx + \mu) = Vx^n + V_1x^{n-1} + V_2x^{n-2} + \cdots + V_{n-1}x + V_n = 0 \tag{2a.}$$

bringen. Wie die Koeffizienten $V, V_1, V_2, \ldots$ gebildet sind, ergibt sich aus der Betrachtung der Ausdrücke

$$U_n(x, mx + \mu), \quad U_{n-1}(x, mx + \mu), \quad U_{n-2}(x, mx + \mu), \ldots,$$

in welche die Größen $U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \ldots$ übergehen, wenn man y gleich $mx + \mu$ einsetzt. Es ist nämlich

$$U_n(x, mx + \mu) =$$
$$a(mx+\mu)^n + a_1x(mx+\mu)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}(mx+\mu) + a_nx^n$$
$$= (am^n + a_1m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n)x^n$$
$$+ \mu[nam^{n-1} + (n-1)a_1m^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}m + a_{n-1}]x^{n-1}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$U_{n-1}(x, mx + \mu) =$$
$$b(mx + \mu)^{n-1} + b_1x(mx + \mu)^{n-2} + \cdots + b_{n-2}x^{n-2}(mx + \mu) + b_{n-1}x^{n-1}$$
$$= (bm^{n-1} + b_1m^{n-2} + \cdots + b_{n-2}m + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots.$$

Daraus folgt

$$(3.)\qquad V = am^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n,$$

$$(4.)\qquad V_1 = \mu[nam^{n-1} + (n-1)a_1 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}]$$
$$+ (bm^{n-1} + b_1 m^{n-2} + \cdots + b_{n-2}m + b_{n-1}),$$

. . . .

Da nun der Wert von m bereits so bestimmt ist, daß Gleichung (9.) in § 125 befriedigt wird, so ist schon deshalb

$$V = 0,$$

d. h. die Gleichung (2a.), nämlich die Gleichung

$$Vx^n + V_1 x^{n-1} + V_2 x^{n-2} + \cdots + V_{n-1}x + V_n = 0,$$

hat bereits eine Wurzel

$$x = \infty,$$

oder mit anderen Worten, die Gerade

$$y' = mx' + \mu$$

geht bereits durch einen unendlich fernen Punkt der Kurve, welchen Wert auch μ haben mag.

Damit sie aber die Kurve in diesem Punkte berührt, muß man μ so bestimmen, daß auch noch eine zweite Wurzel der Gleichung (2a.) unendlich groß wird. Dies geschieht, wenn man

$$(5.)\qquad V_1 = 0$$

macht, indem man

$$(6.)\qquad \mu = -\frac{bm^{n-1} + b_1 m^{n-2} + \cdots + b_{n-2}m + b_{n-1}}{nam^{n-1} + (n-1)a_1 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}$$

setzt.

Die Regel, welche sich aus dieser Untersuchung für die Behandlung von Beispielen ergibt, ist daher folgende:

Man dividiert U_n durch x^n und erhält dadurch, daß man $\lim\limits_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}\right)$ gleich m setzt, die Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_n}{x^n} = am^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1}m + a_n = 0.$$

Ist m eine Wurzel dieser Gleichung, so setze man $y = mx + \mu$ in die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

ein, von der man aber nur die Glieder $U_n + U_{n-1}$ braucht, dividiert durch x^{n-1} und läßt dann x unendlich groß werden. Dies gibt eine Gleichung ersten Grades für die Bestimmung von μ.

Man hätte auch x mit y und infolgedessen m mit l und μ mit λ vertauschen können, um die Gleichung der Asymptoten in der Form

$$x' = ly' + \lambda$$

zu erhalten. Diese Vertauschung ist sogar notwendig, wenn eine oder mehrere Asymptoten der Y-Achse parallel sind, d. h. wenn

$$a = 0, \quad a_1 = 0, \ldots .$$

Eine Modifikation der gegebenen Regel tritt nur ein, wenn die Gleichung

$$f(m) = am^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \cdots + a_{n-1} m + a_n = 0$$

gleiche Wurzeln hat, d. h. wenn unter den Asymptoten etliche *zueinander parallel* sind; dann wird nach dem in § 113 bewiesenen Satze auch

$$f'(m) = nam^{n-1} + (n-1)a_1 m^{n-2} + (n-2)a_2 m^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0.$$

Der Wert von μ ist deshalb entweder nach Gleichung (6.) *unendlich*, d. h. die zugehörigen Asymptoten rücken ins Unendliche, oder es wird auch

$$bm^{n-1} + b_1 m^{n-2} + b_2 m^{n-3} + \cdots + b_{n-2} m + b_{n-1} = 0.$$

In diesem Falle wird V_1 gleich 0 für jeden beliebigen Wert von μ, so daß man den Wert (oder vielmehr die beiden Werte) von μ erhält, indem man

$$V_2 = 0$$

setzt. Ist auch V_2 für jeden Wert von μ gleich 0, und gilt dasselbe für $V_3, \ldots V_{\alpha-1}$ (nicht aber für V_α), beginnt also die Entwickelung von $F(x, mx + \mu)$ nach fallenden Potenzen von x mit $V_\alpha x^{n-\alpha}$, so bestimme man μ so, daß auch

$$V_\alpha = 0$$

wird. Dies ist dann eine Gleichung α^{ten} Grades von μ, dem Umstande entsprechend, daß α Werte von m einander gleich

sind, die aber zu α verschiedenen (zueinander parallelen) Asymptoten gehören.

Am besten wird der Anfänger diese Angaben durch die Ausführung an einigen hier folgenden Beispielen verstehen.

§ 127.

Anwendungen auf einzelne Kurven.

Aufgabe 1. Man soll die Asymptoten der *Hyperbel*

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \tag{1.}$$

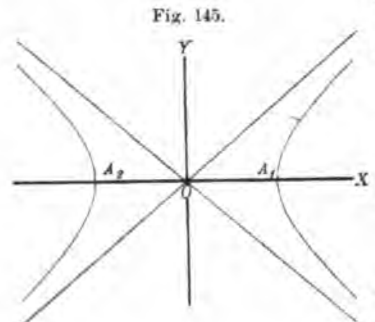
bestimmen. (Vgl. Fig. 145.)

Auflösung. Hier ist $n = 2$ und

$$\frac{U_2}{x^2} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{x^2} = b^2 - a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2, \tag{2.}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_2}{x^2} = b^2 - a^2m^2 = 0, \tag{2a.}$$

Fig. 145.



also

$$m = \pm \frac{b}{a}. \tag{3.}$$

Die Gleichung der einen Asymptote ist daher

$$y' = \frac{b}{a}x' + \mu. \tag{4.}$$

Um auch noch den zugehörigen Wert von μ zu bestimmen, setze man y gleich $\frac{b}{a}x + \mu$ in die Gleichung (1.) ein. Dadurch erhält man

$$b^2x^2 - b^2x^2 - 2ab\mu x - a^2\mu^2 - a^2b^2 = 0$$

und wenn man durch x dividiert,

$$-2ab\mu - \frac{a^2\mu^2 + a^2b^2}{x} = 0. \tag{5.}$$

Läßt man jetzt x unendlich groß werden, so folgt hieraus

$$-2ab\mu = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = 0. \tag{6.}$$

Die Gleichung der ersten Asymptote ist daher

$$y' = \frac{b}{a}x'; \tag{7.}$$

ebenso findet man für die zweite Asymptote die Gleichung

$$y' = -\frac{b}{a}x'. \tag{8.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Asymptoten der *Parabel*

$$y^2 - 2px = 0 \tag{9.}$$

bestimmen.

Auflösung. Hier ist wieder $n = 2$ und

$$\frac{U_2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2}, \quad \lim_{x=\infty} \frac{U_2}{x^2} = m^2 = 0, \tag{10.}$$

also

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0. \tag{11.}$$

Für beide Asymptoten findet man eine Gleichung von der Form

$$y' = \mu. \tag{12.}$$

Um die zugehörigen Werte von μ zu bestimmen, setzt man $y = \mu$ in die Gleichung (9.) ein und erhält

$$\mu^2 = 2px, \quad \mu_1 = +\sqrt{2px}, \quad \mu_2 = -\sqrt{2px}. \tag{13.}$$

Läßt man jetzt x ins Unbegrenzte wachsen, so wachsen auch μ_1 und μ_2 ins Unbegrenzte, d. h. die beiden Asymptoten rücken ins Unendliche.

Aufgabe 3. Man soll die Asymptoten der Kurve

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \tag{14.}$$

bestimmen. (Vgl. Fig. 146.)

Auflösung. Bei dieser Kurve, welche man „*Folium Cartesii*" nennt, ist $n = 3$ und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3, \tag{15.}$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_3}{x^3} = 1 + m^3 = (1 + m)(1 - m + m^2) = 0, \tag{15a.}$$

also

$$m_1 = -1, \quad m_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad m_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Die beiden imaginären Werte von m brauchen nicht berücksichtigt zu werden; die einzige reelle Asymptote erhält man, wenn man m gleich -1 setzt. Dadurch wird

$$y = -x + \mu,$$

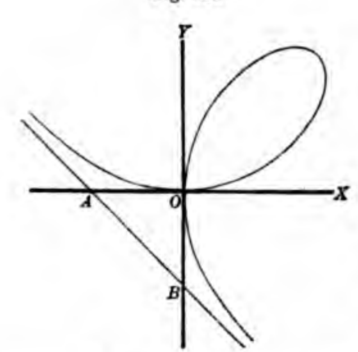
und Gleichung (14.) geht für diesen Wert von y über in

$$3\mu x^2 - 3\mu^2 x + \mu^3 + 3ax^2 - 3a\mu x = 0. \tag{16.}$$

Indem man diese Gleichung durch x^2 dividiert, findet man

$$3\mu + 3a - \frac{3\mu^2}{x} - \frac{3a\mu}{x} + \frac{\mu^3}{x^2} = 0.$$

Fig. 146.



Wenn jetzt x unendlich groß wird, so erhält man

$$3\mu + 3a = 0, \tag{17.}$$

oder

$$\mu = -a.$$

Die Gleichung der reellen Asymptote ist daher

$$y' = -x' - a, \tag{18.}$$

oder

$$x' + y' + a = 0. \tag{18a.}$$

Aufgabe 4. Man soll die Asymptoten der Kurve

$$x^3 - 3xy^2 - a^3 = 0 \tag{19.}$$

bestimmen. (Vgl. Fig. 147.)

Auflösung. Hier ist $n = 3$ und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^3} = 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

also

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = 1 - 3m^2 = 0, \quad m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{20.}$$

Da m die Tangente des Winkels α ist, den die Gerade

$$y = mx + \mu$$

mit der positiven Richtung der X-Achse bildet, und da

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist, so bilden die beiden Asymptoten, welche den gefundenen Werten von m entsprechen, bezw. die Winkel $+30^0$ und -30^0 mit der positiven Richtung der X-Achse.

Setzt man nun

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}} x + \mu$$

in die Gleichung (19.) ein, so findet man

$$(21.)\qquad x^3 - x^3 - 2x^2\mu\sqrt{3} - 3x\mu^2 - a^3 = 0,$$

oder

$$-2\mu\sqrt{3} - \frac{3\mu^2}{x} - \frac{a^3}{x^2} = 0.$$

Wenn jetzt x unendlich groß wird, so folgt hieraus

$$(22.)\qquad -2\mu\sqrt{3} = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = 0.$$

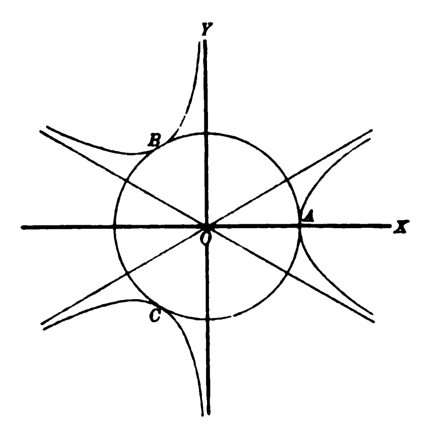
Die erste Asymptote hat daher die Gleichung

$$(23.)\qquad y'\sqrt{3} = x'.$$

Ebenso findet man für die zweite Asymptote die Gleichung

$$(24.)\qquad y'\sqrt{3} = -x'.$$

Fig. 147.



Um noch die dritte Asymptote zu erhalten, bilde man

$$\frac{U_3}{y^3} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{y}\right).$$

Dies gibt

$$(25.)\qquad \lim \frac{U_3}{y^3} = l^3 - 3l = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(26.)\qquad l_1 = +\sqrt{3}, \quad l_2 = -\sqrt{3}, \quad l_3 = 0.$$

Wie man ohne weiteres erkennt, führen die beiden ersten Werte auf die schon bekannten Asymptoten; dagegen liefert $l_3 = 0$ eine dritte Asymptote. Man muß daher

$$x = \lambda$$

in die Gleichung (19.) einsetzen und erhält dadurch

$$\lambda^3 - 3\lambda y^2 - a^3 = 0,$$

oder

$$\frac{\lambda^3}{y^2} - 3\lambda - \frac{a^3}{y^2} = 0.$$

Läßt man jetzt y unendlich groß werden, so folgt hieraus, daß

$$\lambda = 0 \tag{27.}$$

wird, und daß die dritte Asymptote die Gleichung

$$x' = 0 \tag{28.}$$

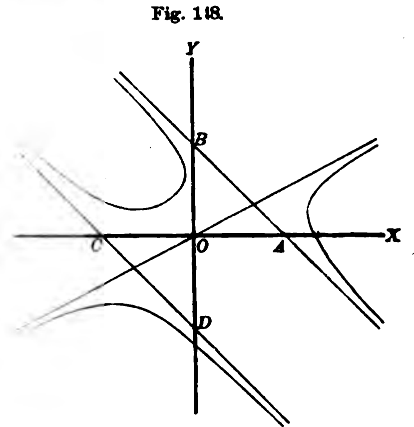
hat. Dies ist aber die Gleichung der Y-Achse.

Aufgabe 5. Man soll die Asymptoten der Kurve

$$x(x^2 - a^2) - 2y(y^2 - a^2) - 3xy^2 - a^3 = 0 \tag{29.}$$

bestimmen. (Vgl. Fig. 148.)

Fig. 148.



Auflösung. Hier ist wieder $n = 3$ und

$$\frac{U_3}{x^3} = \frac{x^3 - 2y^3 - 3xy^2}{x^3}$$

$$= 1 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^3,$$

also

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = 1 - 3m^2 - 2m^3 \tag{30.}$$

$$= (1+m)(1+m)(1-2m) = 0.$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichungen sind daher

$$m_1 = -1, \quad m_2 = -1, \quad m_3 = +\frac{1}{2}. \tag{31.}$$

Bei dieser Kurve findet man zwei *parallele* Asymptoten, weil zwei Werte von m einander gleich sind. Um die zugehörigen Werte von μ zu finden, setze man

$$y = -x + \mu$$

in die Gleichung (29.) ein. Dadurch erhält man

$$x(x^2-a^2)+2(x-\mu)(x^2-2\mu x+\mu^2-a^2)-3x(x^2-2\mu x+\mu^2)-a^3=0,$$

oder

$$(32.)\qquad (-3a^2+3\mu^2)x-2\mu^3+2a^2\mu-a^3=0.$$

Indem man diese Gleichung durch x dividiert und x dann unendlich groß werden läßt, findet man

$$(33.)\qquad -3a^2+3\mu^2=0,\quad \text{oder}\quad \mu=\pm a.$$

Die beiden entsprechenden Asymptoten haben daher die Gleichungen

$$(34.)\qquad y'=-x'+a \quad \text{und}\quad y'=-x'-a.$$

Für die dritte Asymptote hat man

$$y=\frac{1}{2}x+\mu$$

in die Gleichung (29.) einzusetzen. Dadurch erhält man

$$(35.)\qquad -\frac{9}{2}\mu x^2-6\mu^2 x-2\mu^3+2a^2\mu-a^3=0.$$

Indem man diese Gleichung durch x^2 dividiert und dann x unendlich groß werden läßt, findet man

$$(36.)\qquad \mu=0,$$

so daß die dritte Asymptote die Gleichung

$$(37.)\qquad 2y'=x'$$

besitzt.

Fig. 149.

Aufgabe 6. Man soll die Asymptoten der Kurve

$$(38.)\qquad xy^2-x+2y-1=0$$

bestimmen. (Vgl. Fig. 149.)

Auflösung. Hier ist wieder $n=3$ und

$$\frac{U_3}{x^3}=\left(\frac{y}{x}\right)^2,\quad \lim\frac{U_3}{x^3}=m^2=0,\quad m_1=0,\quad m_2=0,\quad m_3=\infty.$$

Die Gleichungen der drei Asymptoten haben daher die Form

(39.) $$y' = \mu_1, \quad y' = \mu_2, \quad x' = \lambda.$$

Dabei findet man μ_1 und μ_2, indem man $y = \mu$ in die Gleichung (38.) einsetzt. Dies gibt

$$x\mu^2 - x + 2\mu - 1 = 0,$$

oder

$$\mu^2 - 1 + \frac{2\mu - 1}{x} = 0,$$

und für $\lim x = \infty$

(40.) $$\mu^2 = 1,$$

(41.) $$\mu_1 = +1, \quad \mu_2 = -1.$$

Ebenso findet man λ, indem man $x = \lambda$ in die Gleichung der Kurve einsetzt. Dadurch erhält man

(42.) $$\lambda y^2 - \lambda + 2y - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda + \frac{2}{y} - \frac{\lambda + 1}{y^2} = 0,$$

und für $\lim y = \infty$

(43.) $$\lambda = 0.$$

Die Gleichungen der drei Asymptoten sind daher

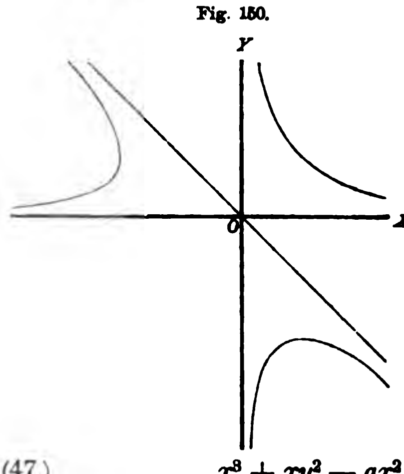
(44.) $$y' = +1, \quad y' = -1, \quad x' = 0.$$

Aufgabe 7. Man soll die Asymptoten der Kurve

(45.) $$xy^2 + x^2y - a^3 = 0$$

bestimmen. (Vgl. Fig. 150.)

Fig. 150.



Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei den vorhergehenden Aufgaben findet man hier drei Asymptoten mit den Gleichungen

(46.) $$\begin{cases} y' = 0, \quad y' = -x', \\ \quad x' = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 8. Man soll die Asymptoten der Kurve

(47.) $$x^3 + xy^2 - ax^2 + ay^2 = 0$$

bestimmen. (Vgl. Fig. 151.)

Auflösung. Hier werden zwei Asymptoten imaginär, weil aus der Gleichung

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = \lim\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 + m^2 = 0$$

folgt, daß

$$m_1 = +i, \quad m_2 = -i, \quad m_3 = \infty$$

wird. Die dritte Asymptote ist reell und steht auf der X-Achse senkrecht. Dabei findet man aus Gleichung (47.), indem man $x = \lambda$ setzt,

Fig. 151.

A_2 O A_1

$$\lambda^3 + \lambda y^2 - a\lambda^2 + ay^2 = 0,$$

oder

$$\lambda + a + \frac{\lambda^3 - a\lambda^2}{y^2} = 0.$$

Dies gibt für $\lim y = \infty$

(48.) $$\lambda = -a;$$

die einzige reelle Asymptote hat die Gleichung

(49.) $$x' + a = 0.$$

Die Gleichung (47.) kann man auf die Form

(50.) $$y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a + x}$$

bringen, woraus man erkennt, daß die X-Achse eine Symmetrie-Achse der Kurve ist, und daß die Kurve zwischen der Asymptote $x' = -a$ und der Geraden $x' = +a$ liegt. Aus

(51.) $$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{a^2 - ax - x^2}{(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{tg}\alpha$$

folgt, indem man $x = 0$ setzt, daß die beiden Tangenten im Nullpunkte die Winkel $+45^0$ und -45^0 mit der positiven Richtung der X-Achse bilden. (Vgl. Fig. 151.)

Aufgabe 9. Man soll die Gleichung der *Zissoide* des *Diokles* herleiten. (Vgl. Fig. 152.)

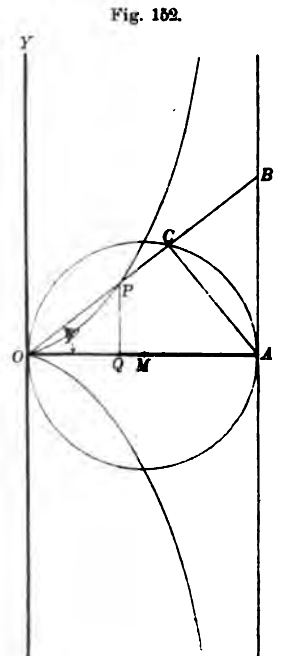
Auflösung. Die Zissoide des Diokles entsteht, indem man an einen Kreis mit dem Halbmesser a zwei parallele Tangenten mit den Berührungspunkten O und A legt, von O aus eine beliebige Sekante zieht, welche den Kreis zum zweiten Male im Punkte C und die andere Tangente im

Punkte B schneiden möge, und von B aus die Sehne OC rückwärts auf der Sekante abträgt, so daß

$$PB = OC$$

wird, dann ist P ein Punkt der Zissoide.

Fig. 152.



Bezeichnet man den Winkel AOP mit φ und die Strecke OP mit r, so findet man aus den rechtwinkligen Dreiecken OAB und OCA

$$OB = \frac{2a}{\cos\varphi}, \quad OC = 2a\cos\varphi, \tag{52.}$$

also

$$OP = r = OB - OC = \frac{2a}{\cos\varphi}(1 - \cos^2\varphi), \tag{53.}$$

oder

$$r = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{53a.}$$

Daraus folgt, da

$$OQ = r\cos\varphi, \quad QP = r\sin\varphi$$

ist,

$$x = 2a\sin^2\varphi, \quad y = \frac{2a\sin^3\varphi}{\cos\varphi}. \tag{54.}$$

Indem man aus diesen beiden Gleichungen φ eliminiert, erhält man

$$x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0. \tag{55.}$$

Aufgabe 10. Man soll die Asymptoten der Zissoide bestimmen.

Auflösung. Schon aus der Entstehung der Zissoide ergibt sich, daß die Kreis-Tangente AB (vgl. Fig. 152) eine Asymptote der Zissoide sein muß. Dasselbe Resultat findet man auch aus der Rechnung. Es ist nämlich

$$\lim \frac{U_3}{x^3} = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = 1 + m^2 = 0, \tag{56.}$$

also

$$m_1 = +i, \quad m_2 = -i, \quad m_3 = \infty, \tag{57.}$$

d. h. zwei Asymptoten sind imaginär, nur die dritte ist reell und steht auf der X-Achse senkrecht. Dabei findet man, indem man $x = \lambda$ in die Gleichung (55.) einsetzt,

$$\lambda^3 + \lambda y^2 - 2ay^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \lambda - 2a + \frac{\lambda^3}{y^2} = 0.$$

Dies gibt für $\lim y = \infty$

$$\lambda = 2a; \tag{58.}$$

folglich hat die reelle Asymptote die Gleichung

$$x' = 2a. \tag{59.}$$

XVII. Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

§ 128.

Einleitung in die Determinanten-Theorie.

Für viele Untersuchungen in der höheren Mathematik gewährt die Anwendung der Determinanten eine wesentliche Erleichterung, einerseits dadurch, daß die Rechnungen kürzer werden, andererseits dadurch, daß die Resultate eine übersichtlichere und leichter zu merkende Form erhalten.

Deshalb soll hier ein kurzer Abriß der Determinanten-Theorie eingeschaltet werden.

Auf die Ausdrücke, welche man Determinanten nennt, ist man durch die Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten geführt worden. Sind z. B. die beiden Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

mit den beiden Unbekannten x_1 und x_2 gegeben, so findet man bekanntlich durch Elimination

$$(2.)\qquad x_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{-c_1 a_{21} + c_2 a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Den gemeinschaftlichen Nenner dieser beiden Ausdrücke, nämlich die Größe

$$(3.)\qquad \varDelta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

nennt man „die *Determinante*“ der Koeffizienten der beiden Gleichungen (1.). Die Determinante wird daher auch so

geschrieben, daß man die Koeffizienten in derselben Reihenfolge wie in den gegebenen Gleichungen aufschreibt und zwischen zwei senkrechte Striche einschließt.

Sind *drei* lineare Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

gegeben, so findet man bei der Auflösung für die drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 Werte, welche den gemeinschaftlichen Nenner

$$(5.)\quad \Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

haben. Diesen Nenner, welcher eine *„Determinante dritter Ordnung“* genannt wird, schreibt man wieder in der Form

$$(5a.)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

wobei die Koeffizienten der gegebenen Gleichungen zwischen zwei senkrechte Striche eingeschlossen sind. Aus Gleichung (5.) erkennt man, daß

$$\Delta = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma}$$

ist, wobei sich die Summation über alle Permutationsformen $\alpha\beta\gamma$ der Zahlen 1 2 3 erstreckt, und wobei das Vorzeichen $(-1)^{\lambda}$ gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem die Permutationsform $\alpha\beta\gamma$ aus 1 2 3 durch eine *gerade* oder eine *ungerade* Anzahl von Vertauschungen von je 2 Zahlen hervorgeht. Demnach sind die Glieder

$$a_{11}a_{22}a_{33}, \quad a_{12}a_{23}a_{31}, \quad a_{13}a_{21}a_{32}$$

mit dem Vorzeichen $+$ zu nehmen, weil die Reihenfolge der zweiten Indizes

123, 231, 312

bezw. durch 0, 2, 2

solche Vertauschungen von je 2 Zahlen aus der Permutationsform 1 2 3 hervorgehen. Vertauscht man nämlich in 1 2 3 die Zahlen 1 und 2 miteinander, so erhält man

2 1 3, und vertauscht man dann die Zahlen 1 und 3 miteinander, so erhält man 2 3 1. Vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 3, so erhält man 3 2 1, und vertauscht man dann die Zahlen 1 und 2, so erhält man 3 1 2.

Die Glieder

$$a_{11}a_{23}a_{32}, \quad a_{12}a_{21}a_{33}, \quad a_{13}a_{22}a_{31}$$

dagegen sind mit dem Vorzeichen — zu nehmen, weil die Permutationsformen

$$1\,3\,2, \quad 2\,1\,3, \quad 3\,2\,1$$

aus 1 2 3 durch eine einzige solche Vertauschung hervorgehen; vertauscht man nämlich in 1 2 3 die Zahlen 2 und 3, so erhält man 1 3 2, vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 2, so erhält man 2 1 3, und vertauscht man in 1 2 3 die Zahlen 1 und 3, so erhält man 3 2 1.

In ähnlicher Weise kann man *„Determinanten höherer Ordnung"* erklären. Der Erklärung mögen aber einige Sätze aus der Permutationslehre vorangeschickt werden.

§ 129.

Einige Sätze aus der Permutationslehre.

Erklärung. Das Permutieren besteht in dem Aufsuchen aller Stellungen, welche n Elemente $a, b, c, \ldots k, l$ einnehmen können. Jede solche Stellung nennt man „eine *Permutationsform*".

Die Anzahl der Permutationsformen bei zwei Elementen a und b ist $1 \cdot 2 = 2!$, nämlich ab und ba. Tritt ein drittes Element c hinzu, so kann man aus jeder dieser beiden Permutationsformen drei bilden, z. B. aus ba die drei Formen

$$cba, \quad bca, \quad bac,$$

indem man c an die erste, die zweite und die dritte Stelle setzt. Die Anzahl der Permutationsformen bei drei Elementen a, b, c ist daher gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$.

Tritt ein viertes Element d hinzu, so kann man aus jeder dieser 3! Permutationsformen vier bilden, z. B. aus bac die vier Formen

d b a c, *b d a c*, *b a d c*, *b a c d*,

indem man d an die erste, zweite, dritte und vierte Stelle setzt. Die Anzahl der Permutationsformen bei vier Elementen ist daher gleich $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 4!$.

Indem man so fortfährt, findet man

Satz 1. *Die Anzahl der Permutationsformen bei* n *Elementen ist* $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$.

Vertauscht man nur zwei Elemente miteinander, so nennt man diese Vertauschung eine „*Transposition*".

Satz 2. *Von zwei beliebigen Permutationsformen* P_1 *und* P_2 *kann die eine aus der anderen durch fortgesetzte Transposition hergeleitet werden.*

Beispiele. Die Permutationsform *e a b d c* kann durch drei Transpositionen in die Form *a b c d e* übergeführt werden, und zwar erhält man der Reihe nach die Formen

e a b d c, *a e b d c*, *a b e d c*, *a b c d e*.

Die Permutationsform *f g a c d e b* kann durch fünf Transpositionen in die Form *a b c d e f g* übergeführt werden, und zwar erhält man der Reihe nach die Formen

f g a c d e b, *a g f c d e b*, *a b f c d e g*,
a b c f d e g, *a b c d f e g*, *a b c d e f g*.

Aus diesen Beispielen erkennt man das Verfahren, das ganz allgemein zum Ziele führt. Es ist aber zu beachten, daß man eine Permutationsform P_1 in eine andere P_2 in mannigfacher Weise durch Transpositionen überführen kann, und daß die Anzahl der verwendeten Transpositionen noch unendlich viele Werte besitzt. Dabei gilt aber der folgende

Satz 3. *Kann man* P_1 *in* P_2 *überführen, das eine Mal durch* λ, *das andere Mal durch* μ *Transpositionen, so ist* $\lambda - \mu$ *stets eine gerade Zahl.*

Beweis. Es sei

$$(1.)\qquad \begin{aligned} F = (b-a)(c-a)(d-a)\ldots(k-a)(l-a)& \\ \text{mal } (c-b)(d-b)\ldots(k-b)(l-b)& \\ \text{mal } (d-c)\ldots(k-c)(l-c)& \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ \text{mal } (l-k).& \end{aligned}$$

Bei der Bildung dieses Produktes hat man jedes Element von allen folgenden subtrahiert und die so entstandenen Differenzen miteinander multipliziert. Es soll nun untersucht werden, wie sich die Größe F ändert, wenn man zwei Elemente, z. B. q und s miteinander vertauscht. Alle Differenzen, in denen q und s gar nicht vorkommen, bleiben unverändert. Ist ferner p irgend ein Element, das den beiden Elementen q und s *vorangeht*, so geht bei der Vertauschung von q mit s das Produkt $(q-p)(s-p)$ in $(s-p)(q-p)$ über und behält denselben Wert. Steht das Element r *zwischen* q und s, so geht das Produkt $(r-q)(s-r)$ in $(r-s)(q-r)$ über und behält gleichfalls denselben Wert. *Folgt* endlich das Element t den beiden Elementen q und s, so geht das Produkt $(t-q)(t-s)$ in $(t-s)(t-q)$ über und behält auch denselben Wert. Nur durch den Faktor $s-q$, welcher bei der Vertauschung von q mit s in $q-s$ übergeht, wird das Vorzeichen von F geändert, während der absolute Betrag von F derselbe bleibt.

Wenn man also zwei Elemente miteinander vertauscht, so ändert die Größe F nur das Vorzeichen.

Ebenso kann man zeigen, daß F bei jeder weiteren Transposition zweier Elemente nur das Vorzeichen ändert. Entsteht F_λ aus F durch λ Transpositionen, so ist daher

$$F_\lambda = (-1)^\lambda F. \tag{2.}$$

Bezeichnet man also die Werte von F, welche den Permutationsformen P_1 und P_2 entsprechen, mit F_1 und F_2, und geht P_1 in P_2 über, das eine Mal durch λ, das andere Mal durch μ Transpositionen, so gelten die beiden Gleichungen

$$F_2 = (-1)^\lambda F_1 \quad \text{und} \quad F_2 = (-1)^\mu F_1; \tag{3.}$$

daraus folgt

$$(-1)^\lambda = (-1)^\mu, \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu \pm 2w, \tag{4.}$$

wobei $2w$ eine beliebige gerade Zahl ist.

Um zu bezeichnen, daß die Permutationsform P (z. B. $1\,2\,3\ldots n$) in P_1 (oder $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu$) durch λ Transpositionen übergeführt wird, schreibt man

(5.) $$\lambda = \binom{P}{P_1} = \binom{1\ 2\ 3 \ldots n}{\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu}.$$

Satz 4. *Geht P in P_1 über durch λ, und geht P_1 in P_2 über durch μ Transpositionen, so geht P in P_2 durch $\lambda + \mu \pm 2w$ Transpositionen über. Ist also*

(6.) $$\lambda = \binom{P}{P_1}, \quad \mu = \binom{P_1}{P_2},$$

so wird

(7.) $$\binom{P}{P_2} = \binom{P}{P_1} + \binom{P_1}{P_2} \pm 2w = \lambda + \mu \pm 2w.$$

Der Beweis folgt unmittelbar daraus, daß P in P_2 übergeht, wenn man zuerst P in P_1 und dann P_1 in P_2 überführt.

Der Satz läßt sich ohne weiteres verallgemeinern; es ist z. B.

(8.) $$\binom{P}{P_3} = \binom{P}{P_1} + \binom{P_1}{P_2} + \binom{P_2}{P_3} \pm 2w.$$

Satz 5. *Die $n!$ Permutationsformen von n Elementen lassen sich durch die Transpositionen zweier Elemente paarweise gruppieren.*

Beweis. Durch die Transposition zweier Elemente, z. B. der beiden Elemente a und b, geht die beliebige Permutationsform P_1 in P_2 über, wobei P_1 und P_2 voneinander verschieden sind. Ist nun die Permutationsform Q_1 von P_1 und P_2 verschieden, so geht Q_1 durch die Vertauschung von a mit b in Q_2 über, wobei Q_2 von Q_1 und auch von P_1 und P_2 verschieden ist. Wäre nämlich Q_2 identisch mit P_1 (bezw. mit P_2), so müßte Q_1 identisch sein mit P_2 (bezw. mit P_1). Ist ferner die Permutationsform R_1 von P_1, P_2, Q_1, Q_2 verschieden, so geht R_1 durch die Vertauschung von a mit b in R_2 über, wobei R_2 von R_1 und auch von P_1, P_2, Q_1, Q_2 verschieden ist.

So kann man fortfahren, bis die sämtlichen Permutationsformen erschöpft sind.

§ 130.

Bildung einer Determinante n^{ter} Ordnung aus n^2 Elementen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 210.)

Eine „*Determinante n^{ter} Ordnung*" möge durch die Gleichung

$$(1.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu}$$

erklärt werden. Die n^2 Größen $a_{11}, a_{12}, \dots a_{nn}$ heißen „die *Elemente* der Determinante"; die Determinante Δ selbst ist eine Summe, bei der jedes Glied das Produkt von n Elementen ist. Dabei enthält ein solches Produkt aus jeder *Zeile* (Horizontalreihe) und aus jeder *Spalte* (Vertikalreihe) *ein und nur ein* Element.

Der Exponent λ ist die Anzahl der Transpositionen, durch welche die Permutationsform $\alpha\beta\gamma \dots \nu$ in die Permutationsform $1\,2\,3 \dots n$ übergeführt werden kann; also

$$(2.)\qquad \lambda = \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu \\ 1\,2\,3 \dots n \end{pmatrix}.$$

So ist z. B. für die Permutationsform 3 1 4 2 diese Zahl λ gleich 3, und zwar erhält man nacheinander die Permutationsformen

3 1 4 2, 1 3 4 2, 1 2 4 3, 1 2 3 4.

Für die Permutationsform 3 2 5 1 4 ist λ wieder gleich 3, und zwar erhält man nacheinander die Permutationsformen

3 2 5 1 4, 1 2 5 3 4, 1 2 3 5 4, 1 2 3 4 5.

Die Summation erstreckt sich über alle Permutationsformen $\alpha\beta\gamma \dots \nu$ der Zahlen $1\,2\,3 \dots n$, folglich ist die Anzahl der Glieder gleich $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \dots n$.

Dies kann man auch so zeigen. Nimmt man ein beliebiges Element der ersten Zeile $a_{1\alpha}$, so gibt es n mögliche Fälle, weil α dabei n Werte haben darf. Da β von α verschieden sein muß, so gibt es bei der Auswahl von

$a_{2\beta}$ aus den Elementen der zweiten Zeile nur noch $n - 1$ mögliche Fälle. Deshalb gibt es bei der Auswahl von $a_{1\alpha}a_{2\beta}$ im ganzen $n(n-1)$ mögliche Fälle. Ebenso erkennt man, daß für die Auswahl von $a_{3\gamma}$ aus den Elementen der dritten Zeile nur $n - 2$ mögliche Fälle und deshalb für die Auswahl von $a_{1\alpha}a_{2\beta}a_{3\gamma}$ im ganzen $n(n-1)(n-2)$ mögliche Fälle vorhanden sind.

Indem man so weiter fortfährt, findet man das oben angegebene Resultat.

§ 131.

Eigenschaften der Determinanten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 211 bis 214.)

Satz 1. *Zwei Glieder* (oder Terme)

$$T_1 = (-1)^{\lambda_1} a_{1\alpha_1} a_{2\beta_1} a_{3\gamma_1} \dots a_{n\nu_1} \tag{1.}$$

und

$$T_2 = (-1)^{\lambda_2} a_{1\alpha_2} a_{2\beta_2} a_{3\gamma_2} \dots a_{n\nu_2} \tag{2.}$$

haben gleiches oder entgegengesetztes Zeichen, je nachdem die Transpositionszahl

$$\varrho = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \nu_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots \nu_2 \end{pmatrix} \tag{3.}$$

gerade oder ungerade ist.

Beweis. Es ist

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \nu_1 \\ 1\ 2\ 3 \dots n \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots \nu_2 \\ 1\ 2\ 3 \dots n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \dots n \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots \nu_2 \end{pmatrix},$$

folglich ist

$$\varrho = \lambda_1 + \lambda_2 \pm 2w. \tag{3a.}$$

Sind λ_1 und λ_2 beide gerade oder beide ungerade, haben also T_1 und T_2 gleiches Zeichen, so ist ϱ gerade. Wenn dagegen von den beiden Zahlen λ_1 und λ_2 die eine gerade und die andere ungerade ist, wenn also T_1 und T_2 entgegengesetztes Zeichen haben, so ist ϱ ungerade.

Satz 2. *Die Determinante Δ hat ebenso viele positive wie negative Glieder.*

Beweis. Wenn die beiden Permutationsformen $\alpha_1\beta_1\gamma_1 \ldots \nu_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2 \ldots \nu_2$ durch eine einzige Transposition ineinander übergehen, wenn also $\varrho = 1$ ist, so haben nach Satz 1 die Glieder T_1 und T_2 entgegengesetztes Vorzeichen. Da man nun durch *eine* Transposition alle Permutationsformen paarweise gruppieren kann, so kann man auch die sämtlichen Glieder der Determinante paarweise gruppieren, so daß bei jedem solchen Paare das eine Glied positiv und das andere negativ ist.

Ordnet man in

$$T = (-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu} \tag{4.}$$

die Faktoren anders, so geht T über in

$$T = (-1)^\lambda a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \ldots a_{l\nu_1}. \tag{4a.}$$

Dabei folgt aus

$$\mu = \begin{pmatrix} a_{1\alpha} & a_{2\beta} & a_{3\gamma} & \ldots & a_{n\nu} \\ a_{f\alpha_1} & a_{g\beta_1} & a_{h\gamma_1} & \ldots & a_{l\nu_1} \end{pmatrix},$$

daß auch

$$\mu = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \ldots n \\ f\,g\,h \ldots l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\;\beta\;\gamma\;\ldots\nu \\ \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \ldots \nu_1 \end{pmatrix} \tag{5.}$$

ist. Außerdem ist

$$\lambda = \begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma \ldots \nu \\ 1\,2\,3 \ldots n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} f\,g\,h \ldots l \\ 1\,2\,3 \ldots n \end{pmatrix}. \tag{6.}$$

Deshalb erhält man

$$\begin{aligned} \varrho &= \begin{pmatrix} f\;g\;h\;\ldots l \\ \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \ldots \nu_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f\,g\,h \ldots l \\ 1\,2\,3 \ldots n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \ldots n \\ \alpha\;\beta\;\gamma \ldots \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\;\beta\;\gamma\;\ldots \nu \\ \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \ldots \nu_1 \end{pmatrix} \pm 2w, \end{aligned} \tag{7.}$$

oder

$$\varrho = \mu + \lambda + \mu \pm 2w = \lambda \pm 2v, \tag{7a.}$$

$$(-1)^\varrho = (-1)^\lambda. \tag{8.}$$

Dies gibt

Satz 3. *Sind in dem Gliede T die Faktoren beliebig geordnet, so ist das Vorzeichen von T gleich $(-1)^\varrho$, wobei ϱ*

die Transpositionszahl zwischen den ersten und den zweiten Indizes ist.

Jetzt möge die Determinante Δ_1 aus

$$(9.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hervorgehen, indem man die Zeilen beliebig miteinander und ebenso die Spalten beliebig miteinander vertauscht, d. h. es sei

$$(10.)\qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & a_{f\gamma} & \dots & a_{f\nu} \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & a_{g\gamma} & \dots & a_{g\nu} \\ a_{h\alpha} & a_{h\beta} & a_{h\gamma} & \dots & a_{h\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & a_{l\gamma} & \dots & a_{l\nu} \end{vmatrix},$$

wobei $f\,g\,h\dots l$ und $\alpha\,\beta\,\gamma\dots\nu$ irgend zwei Permutationsformen der Zahlen $1\,2\,3\dots n$ sind.

Die beiden Determinanten Δ und Δ_1 enthalten dann, abgesehen vom Vorzeichen, genau dieselben Glieder; denn ein beliebiges Glied von Δ_1 ist

$$(11.)\qquad T_1 = (-1)^{\mu} a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \dots a_{l\nu_1},$$

wobei

$$(12.)\qquad \mu = \begin{pmatrix} \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \dots \nu_1 \\ \alpha\;\beta\;\gamma \dots \nu \end{pmatrix}$$

ist. Das entsprechende Glied in Δ heißt

$$(13.)\qquad T = (-1)^{\varrho} a_{f\alpha_1} a_{g\beta_1} a_{h\gamma_1} \dots a_{l\nu_1},$$

wobei nach Satz 3

$$(14.)\qquad \varrho = \begin{pmatrix} f\;g\;h \dots l \\ \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1 \dots \nu_1 \end{pmatrix}$$

die Transpositionszahl zwischen den ersten und zweiten Indizes ist. Bezeichnet man jetzt

$$\begin{pmatrix} f\,g\,h \dots l \\ \alpha\,\beta\,\gamma \dots \nu \end{pmatrix}$$

mit λ, so wird

(15.) $\mu = \binom{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots \nu_1}{f\; g\; h \ldots l} + \binom{f\; g\; h \ldots l}{\alpha\; \beta\; \gamma \ldots \nu} \pm 2w = \varrho + \lambda \pm 2w,$

folglich ist

(16.) $$T_1 = (-1)^\lambda T,$$

und da diese Gleichung für alle Glieder der Determinanten $\varDelta_1$ und $\varDelta$ gilt, so erhält man

(17.) $$\varDelta_1 = (-1)^\lambda \varDelta.$$

In dieser Gleichung ist der folgende Satz enthalten:

Satz 4. *Vertauscht man in einer Determinante $\varDelta$ die Zeilen beliebig miteinander und die Spalten beliebig miteinander, so geht die Determinante in sich selber über, multipliziert mit $(-1)^\lambda$, wobei λ die Transpositionszahl zwischen der neuen Aufeinanderfolge $f g h \ldots l$ der Zeilen und der neuen Aufeinanderfolge $\alpha \beta \gamma \ldots \nu$ der Spalten ist.*

Hieraus ergibt sich als besonderer Fall

Satz 5. *Eine Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen oder zwei Spalten miteinander vertauscht.*

Hat eine Determinante $\varDelta$ zwei identische Zeilen oder zwei identische Spalten, so ändert sich $\varDelta$ nicht, wenn man diese beiden identischen Reihen miteinander vertauscht. Andererseits erhält aber nach Satz 5 die Determinante bei dieser Vertauschung das entgegengesetzte Vorzeichen, folglich wird

(18.) $$\varDelta = -\varDelta, \quad \text{oder} \quad 2\varDelta = 0.$$

Dies gibt

Satz 6. *Eine Determinante mit zwei identischen Zeilen oder mit zwei identischen Spalten ist gleich Null.*

Satz 7. *Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man die Zeilen zu Spalten und die Spalten zu Zeilen macht.*

Beweis. Die Vertauschung der Zeilen mit den Spalten entspricht einer Vertauschung der ersten Indizes mit den zweiten, so daß die Determinante

(19.) $$\varDelta = \Sigma(-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu}$$

bei dieser Vertauschung übergeht in

(20.) $$\varDelta_1 = \Sigma(-1)^\lambda a_{\alpha 1} a_{\beta 2} a_{\gamma 3} \ldots a_{\nu n}.$$

Die beiden Determinanten $\varDelta$ und $\varDelta_1$ enthalten aber genau dieselben Glieder, nur sind die Faktoren der einzelnen Glieder in $\varDelta$ nach den ersten und in $\varDelta_1$ nach den zweiten Indizes geordnet.

Aus diesem letzten Satze erkennt man, daß jeder Satz, welcher sich auf die *Zeilen* einer Determinante bezieht, in gleicher Weise auch von den *Spalten* einer Determinante gilt. Um beide Fälle zusammenzufassen, möge in den folgenden Paragraphen der Ausdruck „*Reihen*“ ebenso für die *Zeilen* wie für die *Spalten* gebraucht werden.

§ 132.

Zerlegung der Determinanten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 215 bis 219.)

Zieht man aus der Determinante

$$(1.)\qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^{\lambda} a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu}$$

alle Glieder heraus, die mit a_{11} multipliziert sind, so erhält man

$$(2.)\qquad \Sigma(-1)^{\lambda} a_{11} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu} = a_{11} \Sigma(-1)^{\lambda} a_{2\beta} a_{3\gamma} \dots a_{n\nu},$$

wo sich die Summation auf alle Permutationsformen $\beta\gamma\dots\nu$ der Zahlen $2\,3\dots n$ erstreckt, während λ die zugehörige Transpositionszahl ist. Der Faktor von a_{11} in Gleichung (2.) — er heiße α_{11} — ist daher

$$(3.)\qquad \alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

er ist also eine Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die aus $\varDelta$ entsteht, indem man die erste Zeile und die erste Spalte fortläßt.



Vertauscht man in Δ die erste Zeile mit der zweiten, so wird

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta.$$

Bei dieser Determinante wird in gleicher Weise wie vorhin der Faktor von a_{21} eine Determinante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch Fortlassen der ersten Zeile und ersten Spalte aus der vorstehenden Determinante hervorgeht; folglich ist der Faktor α_{21} von a_{21} in der ursprünglichen Determinante Δ

$$(5.)\qquad \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und geht aus Δ hervor, indem man die *zweite Zeile* und die erste Spalte fortläßt und das Zeichen

$$(6.)\qquad -1 = (-1)^{2+1}$$

davorsetzt.

In ähnlicher Weise findet man den Faktor von a_{31}, $a_{41}, \dots$, allgemein den Faktor α_{f1} von a_{f1}. Vertauscht man nämlich die f^{te} Zeile mit der $(f-1)^{\text{ten}}$, dann mit der $(f-2)^{\text{ten}}$ und so weiter, bis die Reihenfolge der Zeilen (bezw. der ersten Indizes)

$$f,\ 1,\ 2,\ \dots f-1,\ f+1,\ \dots n$$

geworden ist, so geht bei diesen $f-1$ Vertauschungen Δ in $(-1)^{f-1}\Delta$ über, und das Element a_{f1} steht an erster Stelle. Daraus folgt, daß der Faktor von a_{f1} in Δ, nämlich

$$(7.)\qquad \alpha_{f1} = (-1)^{f-1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,2} & a_{f-1,3} & \dots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,2} & a_{f+1,3} & \dots & a_{f+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus Δ hervorgeht, indem man die f^{te} Zeile und die erste Spalte fortläßt und das Vorzeichen

$$(8.)\qquad (-1)^{f-1} = (-1)^{f+1}$$

hinzufügt.

Vertauscht man jetzt in Δ die r^{te} Spalte mit der $(r-1)^{\text{ten}}$, dann mit der $(r-2)^{\text{ten}}$ und so weiter, bis die Reihenfolge der Spalten (bezw. der zweiten Indizes)

$$r,\ 1,\ 2, \ldots r-1,\ \ r+1, \ldots n$$

geworden ist, so geht Δ in $(-1)^{r-1}\Delta$ über; jetzt kann man den Faktor α_{fr} von a_{fr} in gleicher Weise finden, wie vorhin den Faktor α_{f1} von a_{f1}. Daraus folgt dann, daß

$$(9.)\qquad \alpha_{fr} = (-1)^{f+r} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,1} & \ldots & a_{f-1,r-1} & a_{f-1,r+1} & \ldots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,1} & \ldots & a_{f+1,r-1} & a_{f+1,r+1} & \ldots & a_{f+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus Δ entsteht, indem man die f^{te} Zeile und die r^{te} Spalte fortläßt und den Faktor $(-1)^{f+r}$ hinzufügt.

Diese Faktoren α_{fr} heißen *„Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Δ“* und können auch noch auf die folgende Form gebracht werden. Durch $f-1$ Vertauschungen können die Zeilen (bezw. die ersten Indizes)

$$1,\ 2,\ 3, \ldots f-1,\ \ f+1,\ f+2, \ldots n$$

in die Reihenfolge

$$f+1,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots f-1,\ f+2, \ldots n$$

gebracht werden. Durch weitere $f-1$ Vertauschungen erhält man die Reihenfolge

$$f+1,\ f+2,\ 1,\ 2, \ldots f-1,\ f+3, \ldots n.$$

So kann man fortfahren, bis man durch $(n-f)(f-1)$ Vertauschungen die *„zyklische“* Reihenfolge

$$f+1,\ f+2, \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots f-1$$

erhält. Ebenso gelangt man durch $(n-r)(r-1)$ Vertauschungen der Spalten (bezw. der zweiten Indizes) zu der *zyklischen* Reihenfolge

$$r+1,\ r+2, \ldots n,\ 1,\ 2, \ldots r-1.$$

Wegen dieser Vertauschungen ist α_{fr} mit

$$(-1)^{(n-f)(f-1)+(n-r)(r-1)} = (-1)^{n(f+r)-2n-f(f-1)-r(r-1)}$$

zu multiplizieren. Da noch $2n$, $f(f-1)$ und $r(r-1)$ gerade Zahlen sind, so geht dieser Faktor in

$$(-1)^{n(f+r)}$$

über. Deshalb wird das Vorzeichen von α_{fr}

$$(-1)^{n(f+r)+f+r} = (-1)^{(n+1)(f+r)}.$$

Dies gibt

$$(10.)\qquad \alpha_{fr} = (-1)^{(n+1)(f+r)} \begin{vmatrix} a_{f+1,\,r+1} & a_{f+1,\,r+2} & \cdots & a_{f+1,\,r-1} \\ a_{f+2,\,r+1} & a_{f+2,\,r+2} & \cdots & a_{f+2,\,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,\,r+1} & a_{f-1,\,r+2} & \cdots & a_{f-1,\,r-1} \end{vmatrix}.$$

Ist n *ungerade*, also $n+1$ *gerade*, so sind daher alle diese Unterdeterminanten mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen.

Beachtet man, daß jedes Glied der Determinante Δ *ein und nur ein* Element der ersten Spalte enthält, so findet man, daß

$$(11.)\qquad \Delta = a_{11}\,\alpha_{11} + a_{21}\,\alpha_{21} + a_{31}\,\alpha_{31} + \cdots + a_{n1}\,\alpha_{n1}$$

sein muß; denn es sind erstens alle Glieder von Δ durch die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (11.) erschöpft, weil jedes Glied ein Element der ersten Spalte als Faktor enthalten muß, und zweitens kommt in dieser Summe jedes Glied nur einmal vor, weil kein Glied *zwei* Elemente der ersten Spalte als Faktoren enthalten kann.

Ebenso kann man die Determinante Δ nach den Elementen der r^{ten} Spalte zerlegen und erhält

$$(12.)\qquad \Delta = a_{1r}\,\alpha_{1r} + a_{2r}\,\alpha_{2r} + a_{3r}\,\alpha_{3r} + \cdots + a_{nr}\,\alpha_{nr}.$$

Beispiel.

Es sei $n = 3$, also

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

dann ist

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die *zyklische* Anordnung der Unterdeterminanten benutzt,

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{33}a_{12}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Da sich Δ nicht ändert, wenn man die Zeilen mit den Spalten vertauscht, so findet man in gleicher Weise eine Zerlegung von Δ nach den Elementen einer beliebigen *Zeile*, und zwar wird

(13.) $$\Delta = a_{f1}\alpha_{f1} + a_{f2}\alpha_{f2} + a_{f3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{fn}\alpha_{fn}.$$

Ordnet man z. B. für $n = 3$ die Determinante nach den Elementen der zweiten Zeile, so erhält man

$$\Delta = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

oder bei *zyklischer* Anordnung

$$\Delta = a_{21}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Ist s von r verschieden, und vertauscht man in Gleichung (12.) die Elemente $a_{1r}, a_{2r}, \ldots a_{nr}$ mit $a_{1s}, a_{2s}, \ldots a_{ns}$, so erhält man

(14.) $$\Delta_1 = a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + a_{3s}\alpha_{3r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr},$$

wo Δ_1 gleichfalls eine Determinante ist, welche aus Δ hervorgeht, indem man die Elemente der r^{ten} Spalte durch die Elemente der s^{ten} Spalte ersetzt. Dadurch wird aber Δ_1 eine Determinante, in welcher die Elemente der r^{ten} und der s^{ten} Spalte identisch sind. Deshalb wird Δ_1 nach Satz 6 in § 131 gleich Null, und Gleichung (14.) geht über in

(14a.) $$a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + a_{3s}\alpha_{3r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0,$$

wenn $r \gtrless s$ ist.

Ist ferner g von f verschieden, und vertauscht man in Gleichung (13.) die Elemente $a_{f1}, a_{f2}, \ldots a_{fn}$ mit $a_{g1}, a_{g2}, \ldots a_{gn}$, so erhält man

(15.) $$\Delta_2 = a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + a_{g3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{gn}\alpha_{fn},$$

wo Δ_2 gleichfalls eine Determinante ist, welche aus Δ hervorgeht, indem man die Elemente der f^{ten} Zeile durch die Elemente der g^{ten} Zeile ersetzt. Dadurch wird aber Δ_2 eine Determinante, in welcher die Elemente der f^{ten} und der g^{ten} Zeile identisch sind. Deshalb wird Δ_2 nach Satz 6 in § 131 gleich Null, und Gleichung (15.) geht über in

(15a.) $$a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + a_{g3}\alpha_{f3} + \cdots + a_{gn}\alpha_{fn} = 0,$$

wenn $f \gtrless g$ ist.

§ 133.

Anwendung auf die Auflösung von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 220.)

Sind n lineare Gleichungen mit n Unbekannten:

(1.) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

gegeben, so findet man x_1, indem man die erste Gleichung mit α_{11}, die zweite Gleichung mit $\alpha_{21}, \ldots$ die n^{te} Gleichung mit α_{n1} multipliziert und alle Gleichungen addiert. Der Koeffizient von x_1 wird dann nach Formel Nr. 216 der Tabelle (für $r = 1$)

(2.) $$a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + \cdots + a_{n1}\alpha_{n1} = \Delta,$$

während der Koeffizient von x_s, wenn s von 1 verschieden ist, nach Formel Nr. 218 der Tabelle (für $r = 1$) gleich

(3.) $$a_{1s}\alpha_{11} + a_{2s}\alpha_{21} + \cdots + a_{ns}\alpha_{n1} = 0$$

ist. Man erhält daher bei der Addition

(4.) $$\Delta \, . \, x_1 = c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \cdots + c_n\alpha_{n1},$$

eine Gleichung, aus der sich x_1 unmittelbar ergibt, wenn man auf beiden Seiten durch Δ dividiert.

Ebenso leicht findet man den Wert von x_r, indem man die Gleichungen (1.) bezw. mit

$$\alpha_{1r},\ \alpha_{2r}, \ldots \alpha_{nr}$$

multipliziert und dann addiert. Ist s von r verschieden, so wird bei der Addition der Koeffizient von x_s nach Formel Nr. 218 der Tabelle

$$(5.)\qquad a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0;$$

nur der Koeffizient von x_r wird nach Formel Nr. 216 der Tabelle

$$(6.)\qquad a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\alpha_{nr} = \varDelta,$$

folglich erhält man bei der Addition

$$(7.)\qquad \varDelta \cdot x_r = c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + c_n\alpha_{nr}$$

Wenn man in der Determinante

$$\varDelta = a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\alpha_{nr}$$

die Elemente der r^{ten} Spalte $a_{1r}, a_{2r}, \ldots a_{nr}$ durch die Größen $c_1, c_2, \ldots c_n$ ersetzt, so erhält man

$$c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + c_n\alpha_{nr};$$

deshalb kann man Gleichung (7.) auch schreiben, wie folgt:

$$(7\text{a.})\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot x_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,r-1} & c_1 & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,r-1} & c_2 & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,r-1} & c_n & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Um x_r selbst zu finden, muß man noch die beiden Seiten der Gleichung (7.) oder (7a.) durch $\varDelta$ dividieren, was nur unter der Voraussetzung geschehen darf, daß $\varDelta$ von Null verschieden ist. Was geschieht, wenn $\varDelta = 0$ ist, möge einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

§ 134.

Vereinfachungen bei Ausrechnung der Determinanten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 221 bis 227.)

Satz 1. *Wenn alle Elemente einer Reihe bis auf eines a_{fr} verschwinden, so ist die Determinante gleich diesem einen Elemente a_{fr}, multipliziert mit der zugehörigen Unterdeterminante $(n-1)^{ter}$ Ordnung α_{fr}.*

So ist z. B.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & 0 & C_3 \end{vmatrix} = B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Der Beweis des allgemeinen Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

Satz 2. *Eine Determinante kann auf den nächst höheren Grad gebracht werden, indem man eine Zeile und eine Spalte einschiebt, das den beiden eingeschobenen Reihen gemeinschaftliche Element gleich ± 1 setzt und die übrigen Elemente der einen eingeschobenen Reihe gleich 0 macht. Die übrigen Elemente der anderen eingeschobenen Reihe sind ganz beliebig.*

Es ist z. B.

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei die Größen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ noch ganz beliebig sind.

Der Beweis des Satzes folgt unmittelbar aus der Anwendung von Satz 1. Stehen die beiden eingeschobenen Reihen am Rande der Determinante, wie in dem angegebenen Beispiele, so nennt man das Verfahren „*Rändern der Determinante*“.

Satz 3. *Verschwinden alle Elemente auf der einen Seite einer Diagonale, so reduziert sich die Determinante auf das erste bezw. auf das letzte Glied.*

Es ist z B.

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ 0 & B_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & 0 & C_3 & D_3 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{vmatrix} = A_1 B_2 C_3 D_4.$$

Der Beweis folgt aus der wiederholten Anwendung von Satz 1.

Satz 4. *Haben sämtliche Elemente einer Reihe einen gemeinsamen Faktor, so kann man denselben vor die Determinante setzen.*

Es ist also z. B.

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} \dots ma_{1r} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots ma_{2r} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots ma_{nr} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2r} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nr} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Der Beweis folgt aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

Durch die Anwendung dieses Satzes kann man in vielen Fällen eine Determinante auf eine andere mit kleineren Zahlen reduzieren. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 16 & 7 & 10 \\ 8 & 13 & 25 \end{vmatrix} = 3 . 4 . 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & 13 & 5 \end{vmatrix}.$$

Satz 5. *Sind die Elemente einer Reihe denen einer parallelen Reihe proportional, so ist die Determinante gleich Null.*

Es ist z. B.

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & mA_1 & C_1 \\ A_2 & mA_2 & C_2 \\ A_3 & mA_3 & C_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} A_1 & A_1 & C_1 \\ A_2 & A_2 & C_2 \\ A_3 & A_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Beweis des Satzes folgt aus Satz 4 und Formel Nr. 213 der Tabelle.

Satz 6. *Sind die Elemente einer Reihe Aggregate von gleich vielen Gliedern, so ist die Determinante gleich der Summe mehrerer Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die einzelnen Teilreihen einsetzt.*

Es ist z. B.

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} A_1+B_1, C_1, D_1, \dots \\ A_2+B_2, C_2, D_2, \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n+B_n, C_n, D_n, \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1\, C_1\, D_1 \dots \\ A_2\, C_2\, D_2 \dots \\ \dots\dots\dots \\ A_n\, C_n\, D_n \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1\, C_1\, D_1 \dots \\ B_2\, C_2\, D_2 \dots \\ \dots\dots\dots \\ B_n\, C_n\, D_n \dots \end{vmatrix}.$$

Der Beweis des Satzes folgt aus der Zerlegung der Determinante nach den Elementen der betreffenden Reihe.

Satz 7. *Eine Determinante ändert sich nicht, wenn man zu den Elementen einer Reihe ein beliebiges Vielfaches von den Elementen einer parallelen Reihe addiert.*

Es ist also z. B.

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{1r}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} + ma_{2r}, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} + ma_{nr}, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Der Beweis folgt aus der Verbindung der Sätze 5 und 6.

In welcher Weise die vorstehenden Sätze benutzt werden können, mögen die folgenden Beispiele zeigen.

1) Es ist

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ 0 & x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ -1 & -x_2 & -y_2 \\ -1 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

2) Es ist

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_1 - x_2, & y_1 - y_2, & z_1 - z_2 \\ 0 & x_1 - x_3, & y_1 - y_3, & z_1 - z_3 \\ 0 & x_1 - x_4, & y_1 - y_4, & z_1 - z_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ -1 & -x_2 & -y_2 & -z_2 \\ -1 & -x_3 & -y_3 & -z_3 \\ -1 & -x_4 & -y_4 & -z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}.$$

§ 135.

Multiplikation der Determinanten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 228.)

Es sei

(1.) $$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},\quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

wobei

(2.) $$\begin{cases} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & c_{12} = a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22}, \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & c_{22} = a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, \end{cases}$$

dann soll gezeigt werden, daß

(3.) $$A . B = C$$

ist. Es wird nämlich nach den Sätzen der vorhergehenden Paragraphen

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{21} \\ a_{21}b_{11}, & a_{21}b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}, & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{21} \\ a_{22}b_{12}, & a_{21}b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{12}, & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{12}, & a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{12}b_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Da nun aber die Determinanten mit zwei identischen Spalten gleich Null sind, so wird

(4.) $$C = b_{11}b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{12}b_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$
$$= A . B.$$

Beispiel.

Es ist

(5.) $$\begin{vmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c, & -d \\ d, & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd, & ad - bc \\ bc - ad, & bd + ac \end{vmatrix},$$

oder

(5 a.) $$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Dies gibt den Satz: *Multipliziert man die Summe zweier Quadrate wieder mit der Summe zweier Quadrate, so läßt*

sich das Produkt gleichfalls als die Summe zweier Quadrate darstellen.

In ähnlicher Weise, wie vorhin Determinanten 2ter Ordnung miteinander multipliziert worden sind, kann man auch Determinanten n^{ter} Ordnung miteinander multiplizieren. Es sei jetzt

$$(6.)\qquad A = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\, b_{n2} \ldots b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21}\, c_{22} \ldots c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\, c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$(7.)\qquad c_{fr} = a_{f1} b_{r1} + a_{f2} b_{r2} + \cdots + a_{fn} b_{rn}$$

sein möge. Der Kürze wegen soll Gleichung (7.) in der Form

$$(7\,\text{a.})\qquad c_{fr} = \Sigma^{\alpha} a_{f\alpha} b_{r\alpha}, \quad \text{oder} \quad c_{fr} = \Sigma^{\beta} a_{f\beta} b_{r\beta}, \ldots \quad \text{oder} \quad c_{fr} = \Sigma^{\nu} a_{f\nu} b_{r\nu}$$

geschrieben werden, wobei die Summationsbuchstaben α, $\beta, \ldots \nu$ die Werte 1 bis n durchlaufen. Dadurch erhält man

$$(8.)\qquad C = \begin{vmatrix} \Sigma^{\alpha} a_{1\alpha} b_{1\alpha}, & \Sigma^{\beta} a_{1\beta} b_{2\beta}, \ldots & \Sigma^{\nu} a_{1\nu} b_{n\nu} \\ \Sigma^{\alpha} a_{2\alpha} b_{1\alpha}, & \Sigma^{\beta} a_{2\beta} b_{2\beta}, \ldots & \Sigma^{\nu} a_{2\nu} a_{n\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \Sigma^{\alpha} a_{n\alpha} b_{1\alpha}, & \Sigma^{\beta} a_{n\beta} b_{2\beta}, \ldots & \Sigma^{\nu} a_{n\nu} b_{n\nu} \end{vmatrix},$$

oder, wenn man die Determinante nach den Teilspalten zerlegt,

$$(9.)\qquad C = \Sigma^{\alpha} \Sigma^{\beta} \ldots \Sigma^{\nu} \begin{vmatrix} a_{1\alpha} b_{1\alpha}, & a_{1\beta} b_{2\beta}, \ldots & a_{1\nu} b_{n\nu} \\ a_{2\alpha} b_{1\alpha}, & a_{2\beta} b_{2\beta}, \ldots & a_{2\nu} b_{n\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n\alpha} b_{1\alpha}, & a_{n\beta} b_{2\beta}, \ldots & a_{n\nu} b_{n\nu} \end{vmatrix},$$

wobei α, $\beta, \ldots \nu$ alle Werte von 1 bis n durchlaufen, so daß die Summe im ganzen n^n Glieder enthält. Die Gleichung (9.) kann jetzt aber auch in der Form

$$(9a.)\qquad C = \Sigma b_{1\alpha} b_{2\beta} \dots b_{n\nu} \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & \dots & a_{n\nu} \end{vmatrix}$$

geschrieben werden, wobei das Summenzeichen verlangt, daß $\alpha, \beta, \dots \nu$ *einzeln* alle Werte von 1 bis n annehmen. Man darf sich aber darauf beschränken, daß $\alpha, \beta, \dots \nu$ lauter *verschiedene* Werte haben, weil in Gleichung (9a.) die Determinante der a verschwindet, sobald von den Indizes $\alpha, \beta, \dots \nu$ zwei einander gleich sind. Man braucht daher in Gleichung (9a.) die Summation nur über die $n!$ Permutationsformen $\alpha\beta \dots \nu$ der Zahlen $12 \dots n$ zu erstrecken. Nun ist aber, wenn $\alpha\beta \dots \nu$ eine Permutationsform der Zahlen $12 \dots n$ ist,

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\nu} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n\alpha} & a_{n\beta} & \dots & a_{n\nu} \end{vmatrix} = (-1)^\lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^\lambda A,$$

wobei

$$(11.)\qquad \lambda = \begin{pmatrix} \alpha\beta \dots \nu \\ 1\,2 \dots n \end{pmatrix}$$

ist, folglich geht Gleichung (9a.) über in

$$(12.)\qquad C = A \,.\, \Sigma(-1)^\lambda b_{1\alpha} b_{2\beta} \dots b_{n\nu} = A \,.\, B.$$

Dies gibt den Satz:

Zwei Determinanten n^{ter} Ordnung werden miteinander multipliziert, indem man die Elemente der f^{ten} Zeile der ersten Determinante mit den gleichstelligen Elementen der r^{ten} Zeile der zweiten Determinante multipliziert, diese n Produkte addiert und aus den so erhaltenen n^2 Summen eine neue Determinante bildet.

Da man in jeder der beiden Determinanten A und B die Zeilen mit den Kolonnen vertauschen darf, so kann c_{fr} auch die folgenden Werte erhalten:

$$(13.)\qquad c_{fr} = a_{f1} b_{1r} + a_{f2} b_{2r} + \dots + a_{fn} b_{nr},$$

oder

$$c_{fr} = a_{1f}b_{r1} + a_{2f}b_{r2} + \cdots + a_{nf}b_{rn}, \tag{14.}$$

oder

$$c_{fr} = a_{1f}b_{1r} + a_{2f}b_{2r} + \cdots + a_{nf}b_{nr}. \tag{15.}$$

§ 136.

Homogene, lineare Gleichungen mit n Unbekannten.

Sind n lineare Gleichungen mit n Unbekannten

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{array}\right. \tag{1.}$$

gegeben, so wird nach Formel Nr. 220 der Tabelle

$$\Delta . x_r = c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + c_n\alpha_{nr}. \tag{2.}$$

Läßt man jetzt die Größen $c_1, c_2, \ldots c_n$ immer kleiner werden und schließlich ganz verschwinden, so erhält man die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{array}\right. \tag{3.}$$

Diese linearen Gleichungen heißen *homogen*. Aus den Gleichungen (3.) findet man in diesem Falle

$$\Delta . x_r = 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, 3, \ldots n. \tag{4.}$$

Wenn man nun weiß, daß die Gleichungen (3.) auch für solche Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gelten, die nicht sämtlich gleich Null sind, so folgt aus den Gleichungen (4.), daß

$$\Delta = 0$$

sein muß. Dies gibt den Satz:

Wenn n lineare, homogene Gleichungen mit n Unbekannten für Werte der Unbekannten, die nicht sämtlich gleich 0 *sind, gleichzeitig bestehen, so muß die Determinante Δ der Koeffizienten gleich* 0 *sein.*

Über Differentiation der Determinanten vgl. § 141.

§ 137.

Anwendungen auf einzelne Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Bedingung finden, unter welcher drei Gerade g_1, g_2, g_3 durch einen Punkt gehen.

Auflösung. Man kann die Gleichungen

$$(1.)\qquad A_1x + B_1y + C_1 = 0,\quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,\quad A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

der drei Geraden g_1, g_2, g_3 homogen machen, indem man

$$(2.)\qquad x = \frac{x_1}{x_3},\quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

einsetzt und dann die Gleichungen mit x_3 multipliziert. Dadurch gehen die drei Gleichungen (1.) über in

$$(3.)\qquad \begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 = 0. \end{cases}$$

Dabei darf man noch für x_3 jeden beliebigen Wert setzen. Ist z. B. $x_3 = 1$, so wird

$$x_1 = x,\quad x_2 = y.$$

Da also die drei linearen, homogenen Gleichungen (3.) gleichzeitig gelten sollen für Werte von x_1, x_2, x_3, die nicht alle drei gleich Null sind, so muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden. Die Bedingung dafür, daß die drei Geraden durch einen Punkt gehen, ist daher

$$(4.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgabe 2. Man soll die Bedingung finden, unter welcher vier Ebenen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 durch einen Punkt gehen.

Auflösung. Man kann die Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

der vier Ebenen ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 homogen machen, indem man

$$(6.)\qquad x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

einsetzt und dann die Gleichungen mit x_4 multipliziert. Dadurch gehen die Gleichungen (5.) über in

$$(7.)\qquad \begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 = 0, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3x_4 = 0, \\ A_4x_1 + B_4x_2 + C_4x_3 + D_4x_4 = 0. \end{cases}$$

Da diese linearen, homogenen Gleichungen gleichzeitig gelten sollen für Werte der Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4, die nicht alle vier gleich Null sind, so muß die Determinante der Koeffizienten verschwinden. Die Bedingung dafür, daß die vier Ebenen durch einen Punkt gehen, ist daher

$$(8.)\qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Aufgabe 3. Man soll die Bedingung finden, unter welcher drei Punkte P_1, P_2, P_3 in einer Geraden g liegen.

Auflösung. Hat die Gerade g die Gleichung

$$(9.)\qquad Ax + By + C = 0,$$

so liegen die drei Punkte P_1, P_2, P_3 auf dieser Geraden, wenn

$$(10.)\qquad \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C = 0, \\ Ax_2 + By_2 + C = 0, \\ Ax_3 + By_3 + C = 0 \end{cases}$$

ist. Hierbei sind x_1, y_1; x_2, y_2, x_3, y_3 die gegebenen Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, während die drei Größen A, B, C noch unbekannt sind. Man hat also drei lineare, homogene Gleichungen mit den drei Unbekannten A, B, C.

Da diese Unbekannten nicht alle drei gleich Null sein dürfen, so können die Gleichungen (10.) nur dann gleichzeitig gelten, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Die Bedingung, unter welcher die drei Punkte in gerader Linie liegen, ist daher

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.}$$

Aufgabe 4. Man soll die Bedingung finden, unter welcher vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 des Raumes in einer Ebene ε liegen.

Auflösung. Hat die Ebene ε die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{12.}$$

so liegen die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 in dieser Ebene, wenn

$$\left\{\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0, \\ Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D = 0 \end{array}\right. \tag{13.}$$

ist. Hierbei sind x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 die gegebenen Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, während die vier Größen A, B, C, D noch unbekannt sind. Man hat also vier lineare, homogene Gleichungen mit den Unbekannten A, B, C, D. Da diese Unbekannten nicht alle vier gleich Null sein dürfen, so können die Gleichungen (13.) nur dann gleichzeitig gelten, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Die Bedingung, unter welcher die vier Punkte in einer Ebene liegen, ist daher

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{14.}$$

Aufgabe 5. Man soll den Kreis bestimmen, der durch drei gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 hindurchgeht.

Auflösung. Hat der gesuchte Kreis die Gleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - \varrho^2 = 0, \tag{15.}$$

so geht er durch die drei gegebenen Punkte, wenn

$$x_1^2 - 2\xi x_1 + \xi^2 + y_1^2 - 2\eta y_1 + \eta^2 - \varrho^2 = 0, \tag{16.}$$

$$x_2^2 - 2\xi x_2 + \xi^2 + y_2^2 - 2\eta y_2 + \eta^2 - \varrho^2 = 0, \tag{17.}$$

$$x_3^2 - 2\xi x_3 + \xi^2 + y_3^2 - 2\eta y_3 + \eta^2 - \varrho^2 = 0 \tag{18.}$$

ist. Diese drei Gleichungen mit den drei Unbekannten ξ, η und ϱ sind *nicht linear*. Zieht man aber die Gleichungen (17.) und (18.) von Gleichung (16.) ab, so erhält man zwei *lineare* Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} 2(x_1 - x_2)\xi + 2(y_1 - y_2)\eta = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2, \\ 2(x_1 - x_3)\xi + 2(y_1 - y_3)\eta = x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 \end{array}\right. \tag{19.}$$

mit den beiden Unbekannten ξ und η. Indem man noch der Kürze wegen

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r_2^2, \quad x_3^2 + y_3^2 = r_3^2 \tag{20.}$$

setzt, findet man durch Auflösung der Gleichungen (19.)

$$2\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} \cdot \xi = \begin{vmatrix} r_1^2 - r_2^2, & y_1 - y_2 \\ r_1^2 - r_3^2, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} \tag{21.}$$

$$2\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} \cdot \eta = \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & r_1^2 - r_2^2 \\ x_1 - x_3, & r_1^2 - r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{22.}$$

Die Determinanten, welche hier auftreten, kann man, wie schon in § 134, Seite 628 gezeigt wurde, umformen und erhält dadurch

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \xi = \begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & y_1 \\ 1 & r_2^2 & y_2 \\ 1 & r_3^2 & y_3 \end{vmatrix}, \tag{21a.}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \eta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & r_1^2 \\ 1 & x_2 & r_2^2 \\ 1 & x_3 & r_3^2 \end{vmatrix}. \tag{22a.}$$

Wird

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

so werden ξ und η unendlich groß, d. h. der Mittelpunkt des Kreises rückt ins Unendliche, und die drei Punkte P_1, P_2, P_3 liegen in gerader Linie, wie schon in Aufgabe 3 gezeigt wurde.

Der Wert von ϱ^2 ergibt sich aus Gleichung (16.), (17.) oder (18.), indem man die gefundenen Werte von ξ und η einsetzt.

Aufgabe 6. Man soll die Kugelfläche bestimmen, welche durch vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 hindurchgeht.

Auflösung. Hat die Kugelfläche die Gleichung

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2-\varrho^2=0, \tag{23.}$$

so findet man die Werte von ξ, η, ζ in ähnlicher Weise wie bei der vorhergehenden Aufgabe die Werte von ξ und η, und zwar erhält man, wenn man der Kürze wegen

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2+z_1^2=r_1^2, & x_2^2+y_2^2+z_2^2=r_2^2, \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2=r_3^2, & x_4^2+y_4^2+z_4^2=r_4^2 \end{cases} \tag{24.}$$

setzt,

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\cdot\xi=\begin{vmatrix} 1 & r_1^2 & y_1 & z_1 \\ 1 & r_2^2 & y_2 & z_2 \\ 1 & r_3^2 & y_3 & z_3 \\ 1 & r_4^2 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \tag{25.}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\cdot\eta=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & r_1^2 & z_1 \\ 1 & x_2 & r_2^2 & z_2 \\ 1 & x_3 & r_3^2 & z_3 \\ 1 & x_4 & r_4^2 & z_4 \end{vmatrix}, \tag{26.}$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}\cdot\zeta=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & r_4^2 \end{vmatrix}. \tag{27.}$$

Wird

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

so werden ξ, η, ζ unendlich groß, d. h. der Mittelpunkt der Kugel rückt ins Unendliche, und die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 liegen, wie schon in Aufgabe 4 gezeigt wurde, in einer Ebene.

Den Wert von ϱ findet man schließlich aus der Gleichung

$$(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2 + (z_1 - \zeta)^2 = \varrho^2. \tag{28.}$$

Dritter Teil.

Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

XVIII. Abschnitt.

Differentiation der Funktionen von mehreren voneinander unabhängigen Veränderlichen.

§ 138.

Differentiation einer Funktion von zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 229.)

Eine Funktion von zwei oder mehr Veränderlichen wurde bereits in § 3 (Seite 23) folgendermaßen erklärt:

Eine veränderliche Größe z heißt eine Funktion der beiden Veränderlichen x und y für $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$, wenn jedem Wertsysteme x, y in den angegebenen Intervallen ein oder mehrere Werte von z nach einem bestimmten Gesetze zugeordnet sind.

Hier möge nur der Fall in Betracht gezogen werden, wo dieses Gesetz durch eine Gleichung zwischen x, y, z gegeben ist.

Besteht nämlich zwischen drei veränderlichen Größen x, y, z eine Gleichung, so wird man zweien von ihnen, z. B. x und y, beliebige Werte beilegen können; dadurch wird dann z die Wurzel einer Gleichung mit konstanten Koeffi-

zienten, so daß z nur noch eine Anzahl ganz bestimmter Werte haben darf.

Bei dieser Anschauungsweise sind also x und y die *unabhängigen* Veränderlichen, während z eine von x und y *abhängige* Veränderliche oder eine *Funktion von x und y* ist.

Man kann sich die Gleichung zwischen x, y und z deshalb auf die Form

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

gebracht denken und erkennt, daß Veränderungen von z auf dreifache Art hervorgerufen werden können, nämlich

1) indem sich x allein ändert,

2) „ „ y „ „

3) „ „ x und y gleichzeitig ändern.

Den Unterschied zwischen diesen drei Fällen kann man sich am leichtesten durch die geometrische Deutung der Gleichung (1.) als Gleichung einer Fläche im Raume klar machen. Da $y = b$ die Gleichung einer Ebene ist, welche der ZX-Ebene parallel ist, so liegen für konstante Werte von y die Flächenpunkte mit den Koordinaten x, y, z alle in einer Ebene, welche zur ZX-Ebene parallel ist und die Fläche in einer Kurve schneidet. Auf dieser Kurve kann daher der Flächenpunkt P nur fortschreiten, wenn man x als die einzige Veränderliche und y als eine Konstante betrachtet.

Ebenso kann der Flächenpunkt P nur auf einer Kurve fortschreiten, welche in einer zur YZ-Ebene parallelen Ebene liegt, wenn man y als einzige Veränderliche und x als eine Konstante betrachtet.

Sind aber x und y beide veränderlich, so kann der Flächenpunkt auf der Fläche nach allen beliebigen Richtungen fortschreiten.

Betrachtet man zunächst den ersten Fall, wo nur x als *veränderlich* und y als *konstant* angesehen wird, so kann man z wie eine Funktion der einzigen Veränderlichen x behandeln und auch ebenso differentiieren. Man bezeichnet dann aber, wie schon in § 77, Seite 378 hervorgehoben

wurde, den Differential-Quotienten nicht mit $\frac{dz}{dx}$, sondern mit $\frac{\partial z}{\partial x}$, so daß man erhält

$$(2.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y)}{\Delta x} = f_1(x,\, y).$$

In dem zweiten Falle, wo nur y als *veränderlich* und x als *konstant* angesehen wird, findet man in derselben Weise

$$(3.)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)}{\Delta y} = f_2(x\, y).$$

Diese Ausdrücke werden die „*partiellen* Ableitungen von z nach x und nach y" genannt.

Dementsprechend nennt man die Änderung, welche z dadurch erleidet, daß sich nur x um die Größe Δx ändert, die „*partielle Zunahme von z in bezug auf x*" und bezeichnet sie mit $\Delta_x z$. Es ist also

$$(4.)\qquad z + \Delta_x z = f(x + \Delta x,\, y),$$

und wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahiert,

$$(5.)\qquad \Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \frac{f(x + \Delta x,\, y) - f(x,\, y)}{\Delta x}\, \Delta x.$$

Ebenso nennt man die Änderung, welche z dadurch erleidet, daß sich nur y um die Größe Δy ändert, die „*partielle Zunahme von z in bezug auf y*" und bezeichnet sie mit $\Delta_y z$. Es ist also

$$(6.)\qquad z + \Delta_y z = f(x,\, y + \Delta y),$$

und wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahiert,

$$(7.)\qquad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\, \Delta y.$$

Läßt man jetzt die Größen Δx und Δy unendlich klein werden, indem man sie durch ihre Differentiale dx und dy ersetzt, so werden auch die entsprechenden Änderungen von z, nämlich $\Delta_x z$ und $\Delta_y z$, unendlich klein und heißen dann die „*partiellen Differentiale* $\partial_x z$ und $\partial_y z$ von z" Dabei folgt aus den Gleichungen (5.) und (7.)

(8.) $$\partial_x z = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} dx,$$

(9.) $$\partial_y z = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

In dem dritten Falle dagegen, wo sich x um Δx und gleichzeitig y um Δy ändert, nennt man die entsprechende Änderung von z die *„vollständige* oder *totale* Zunahme von z" und bezeichnet sie mit Δz. Es wird also

(10.) $$z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y),$$

und wenn man hiervon die Gleichung (1.) subtrahiert,

(11.) $$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

wobei Δx und Δy voneinander *unabhängige* Größen sind. Die hier folgenden Schlüsse gelten jedoch auch dann noch, wenn man diese Voraussetzung nicht macht, wenn also x und y und deshalb auch Δx und Δy voneinander abhängig sind.

Gleichung (11.) kann man auf die Form

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \\ + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

bringen. Dies gibt, wenn man $y + \Delta y$ der Kürze wegen mit y_1 bezeichnet,

(12.) $$\Delta z = f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ = \frac{f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y.$$

Läßt man jetzt wieder Δx und Δy unendlich klein werden, so wird auch Δz unendlich klein und geht in das *vollständige oder totale Differential von z* über, welches man mit dz bezeichnet. Da nun

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x},$$

$$\lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

und $\lim y_1 = y$ wird, so geht Gleichung (12.) über in

(13.) $$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy,$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \partial_x z + \partial_y z. \tag{14.}$$

Es gilt also der Satz:

Das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Derselbe Satz ist auch in § 77, Gleichung (16a.) ausgesprochen; damals handelte es sich aber um eine Funktion

$$z = F(u, v)$$

von zwei veränderlichen Größen u und v, die nicht voneinander *unabhängig*, sondern beide wieder Funktionen von *einer* Veränderlichen x waren.

§ 139.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = x^3 y^2. \tag{1.}$$

Auflösung. Die partielle Ableitung nach x bildet man, indem man x als *veränderlich* und y als *konstant* betrachtet; und die partielle Ableitung nach y bildet man, indem man y als *veränderlich* und x als *konstant* betrachtet. Deshalb ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y, \tag{2.}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 3x^2y^2dx + 2x^3ydy. \tag{3.}$$

Aufgabe 2. Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = y^3 + 4x^2y + 2x^3. \tag{4.}$$

Auflösung.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy + 6x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 4x^2, \tag{5.}$$

$$dz = (8xy + 6x^2)dx + (3y^2 + 4x^2)dy. \tag{6.}$$

Aufgabe 3. Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = y^2 \sin x. \tag{7.}$$

Auflösung. Hier findet man in ähnlicher Weise wie vorhin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin x, \tag{8.}$$

$$dz = y^2 \cos x dx + 2y \sin x dy. \tag{9.}$$

Aufgabe 4. Man soll die Werte von $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ und dz ermitteln für

$$z = e^y \arcsin x + x^2 . \ln y. \tag{10.}$$

Auflösung.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{\sqrt{1-x^2}} + 2x . \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^y \arcsin x + \frac{x^2}{y}, \tag{11.}$$

$$dz = \left(\frac{e^y}{\sqrt{1-x^2}} + 2x . \ln y\right) dx + \left(e^y \arcsin x + \frac{x^2}{y}\right) dy. \tag{12.}$$

§ 140.

Differentiation der Funktionen von mehreren voneinander unabhängigen Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 230 und 231.)

Das in § 138 angedeutete Verfahren läßt sich ohne weiteres auf Funktionen von drei oder von mehr voneinander unabhängigen Veränderlichen übertragen. Ist z. B. z eine Funktion von drei Veränderlichen u, v, w, ist also

$$z = f(u, v, w), \tag{1.}$$

so kann man zunächst die partiellen Ableitungen bilden, indem man setzt

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w)}{\Delta u} = f_1(u, v, w), \tag{2.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{f(u, v + \Delta v, w) - f(u, v, w)}{\Delta v} = f_2(u, v, w), \tag{3.}$$

$$(4.)\quad \frac{\partial z}{\partial w} = \lim_{\Delta w = 0} \frac{f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta w} = f_3(u, v, w).$$

Aus den drei *partiellen Zunahmen* von z, nämlich aus

$$(5.)\quad \begin{cases} \Delta_u z = f(u + \Delta u, v, w) - f(u, v, w), \\ \Delta_v z = f(u, v + \Delta v, w) - f(u, v, w), \\ \Delta_w z = f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w) \end{cases}$$

erhält man sodann, indem man Δu, Δv, Δw durch die Differentiale du, dv, dw ersetzt, die drei *partiellen Differentiale* von z, nämlich

$$(6.)\quad \partial_u z = \frac{\partial z}{\partial u} du, \quad \partial_v z = \frac{\partial z}{\partial v} dv, \quad \partial_w z = \frac{\partial z}{\partial w} dw.$$

Ist endlich Δz die Änderung von z, wenn sich gleichzeitig u um Δu, v um Δv, w um Δw ändern, ist also

$$z + \Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w),$$

so wird

$$(7.)\quad \Delta z = f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w),$$

oder

$$(7a.)\quad \begin{aligned} \Delta z = {} & f(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) \\ & + f(u, v + \Delta v, w + \Delta w) - f(u, v, w + \Delta w) \\ & + f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w). \end{aligned}$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $v + \Delta v$ mit v_1 und $w + \Delta w$ mit w_1, so kann man diese Gleichung auf die Form

$$(7b.)\quad \begin{aligned} \Delta z = {} & \frac{f(u + \Delta u, v_1, w_1) - f(u, v_1, w_1)}{\Delta u} \Delta u \\ & + \frac{f(u, v + \Delta v, w_1) - f(u, v, w_1)}{\Delta v} \Delta v \\ & + \frac{f(u, v, w + \Delta w) - f(u, v, w)}{\Delta w} \Delta w \end{aligned}$$

bringen. Geht man jetzt zur Grenze über, indem man Δu, Δv und Δw durch die entsprechenden Differentiale du, dv, dw ersetzt, so wird

$$\lim v_1 = v, \quad \lim w_1 = w,$$

und Δz geht über in das *vollständige* (oder *totale*) Differential von z, nämlich in

$$(8.)\quad dz = \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial u} du + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial v} dv + \frac{\partial f(u, v, w)}{\partial w} dw,$$

oder

$$(8a.)\quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw.$$

Auch hier gilt also der Satz:

Das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentiale.

Beispiel.

Es sei

$$(9.)\quad z = v^2 w \sin u + e^w . \ln u;$$

dann wird

$$(10.)\quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = v^2 w \cos u + \frac{e^w}{u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = 2vw \sin u, \\ \frac{\partial z}{\partial w} = v^2 \sin u + e^w . \ln u, \end{cases}$$

also

$$(11.)\quad dz = \left(v^2 w \cos u + \frac{e^w}{u}\right) du + 2vw \sin u dv + (v^2 \sin u + e^w . \ln u) dw.$$

In derselben Weise kann man

$$(12.)\quad z = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

nach jeder der n Veränderlichen einzeln differentiieren, indem man die anderen Veränderlichen als *konstant* betrachtet. So erhält man die *partiellen Ableitungen.* Multipliziert man dann noch mit dem Differential der betreffenden Veränderlichen, so sind die Produkte die *partiellen Differentiale* von z, nämlich

$$(13.)\quad \partial_{u_1} z = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1, \quad \partial_{u_2} z = \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2, \ldots \partial_{u_n} z = \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n.$$

Das vollständige (oder totale) Differential ist dann wieder gleich der Summe der partiellen Differentiale, also

$$(14.)\quad dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n.$$

Dabei ist zunächst die Voraussetzung gemacht, daß die n Veränderlichen $u_1, u_2, \dots u_n$ voneinander unabhängig sind. Der Beweis für die Richtigkeit der Formel (14.) läßt sich aber auch leicht auf den Fall übertragen, wo $u_1, u_2, \dots u_n$ sämtlich Funktionen von einer Veränderlichen t sind.

In diesem Falle sind jedoch, wie für $n = 2$ schon in § 77 gezeigt wurde, die Differentiale $du_1, du_2, \dots du_n$ nicht mehr voneinander unabhängige Größen; es folgt vielmehr aus den Gleichungen

$$u_1 = \varphi_1(t), \quad u_2 = \varphi_2(t), \dots u_n = \varphi_n(t), \tag{15.}$$

daß

$$du_1 = \varphi_1'(t)dt, \quad du_2 = \varphi_2'(t)dt, \dots du_n = \varphi_n'(t)dt \tag{16.}$$

wird. Deshalb darf man in diesem Falle die beiden Seiten der Gleichung (14.) durch dt dividieren und erhält auf diese Weise

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}. \tag{17.}$$

Die Formel (14.) bleibt sogar noch richtig, wenn $u_1, u_2, \dots u_n$ wiederum Funktionen von m Veränderlichen $t_1, t_2, \dots t_m$ sind, wenn also

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots t_m), \\ u_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots t_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots t_m). \end{cases} \tag{18.}$$

Dabei muß natürlich $m < n$ sein.

Setzt man nämlich diese Werte in die Gleichung (12.) ein, so wird

$$z = F(t_1, t_2, \dots t_m) \tag{19.}$$

eine Funktion von $t_1, t_2, \dots t_m$ und deshalb, der Gleichung (14.) entsprechend,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial z}{\partial t_2} dt_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial t_m} dt_m. \tag{20.}$$

Ebenso folgt aus den Gleichungen (18.)

$$du_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \cdots + \frac{\partial u_\alpha}{\partial t_m} dt_m \tag{21.}$$

für $\alpha = 1, 2, 3, \ldots n$. Nun ist aber nach Gleichung (17.), wenn man zuerst t_1, dann $t_2, \ldots$, endlich t_m als die einzige Veränderliche betrachtet,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t_1} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial t_2} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial z}{\partial t_m} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t_m} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial t_m}. \end{array}\right. \tag{22.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit $dt_1, dt_2, \ldots dt_m$ und addiert sie, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (20.) und (21.)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n. \tag{23.}$$

§ 141.

Anwendung auf die Differentiation der Determinanten.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 232 bis 234.)

Da man nach den Formeln Nr. 216 und 217 der Tabelle die Determinante $\varDelta$ auf die Form

$$\varDelta = a_{1r}\alpha_{1r} + a_{2r}\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\alpha_{nr}, \tag{1.}$$

oder

$$\varDelta = a_{f1}\alpha_{f1} + a_{f2}\alpha_{f2} + \cdots + a_{fn}\alpha_{fn} \tag{2.}$$

bringen kann, so findet man für jeden Wert der Indizes f und r ohne weiteres

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{fr}} = \alpha_{fr}. \tag{3.}$$

Man könnte daher die Gleichungen (1.) und (2.) auch in der Form

$$\varDelta = a_{1r}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1r}} + a_{2r}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{2r}} + \cdots + a_{nr}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{nr}} \tag{4.}$$

und

$$(5.)\qquad \Delta = a_{f1}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{f1}} + a_{f2}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{f2}} + \cdots + a_{fn}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{fn}}$$

schreiben.

Sind die Elemente a_{fr} der Determinante Δ sämtlich Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t, und bezeichnet man der Kürze wegen

$$\frac{da_{fr}}{dt} \quad \text{mit } a'_{fr},$$

so folgt aus Gleichung (3.)

$$(6.)\qquad \frac{d\Delta}{dt} = \sum_{f,r}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{fr}}\cdot a'_{fr} = \sum_{f,r} a'_{fr}\,.\,a_{fr} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} f = 1, 2, \ldots n, \\ r = 1, 2, \ldots n; \end{matrix}$$

d. h. man erhält eine Summe von n^2 Gliedern. Faßt man aber dabei je n Glieder zusammen, z. B. die Glieder, bei denen der Index r denselben Wert hat, so erhält man

$$(7.)\qquad \frac{d\Delta}{dt} = \sum_f a'_{f1}\alpha_{f1} + \sum_f a'_{f2}\alpha_{f2} + \cdots + \sum_f a'_{fn}\alpha_{fn}$$

$$\text{für} \quad f = 1, 2, \ldots n.$$

Jedes Glied dieser Summe ist wieder eine Determinante n^{ter} Ordnung, welche aus Δ entsteht, indem man die Elemente der r^{ten} Spalte, also die Elemente

$$a_{1r},\ a_{2r}, \ldots a_{nr}$$

durch die Elemente

$$a'_{1r},\ a'_{2r}, \ldots a'_{nr}$$

ersetzt. Es wird deshalb

$$(8.)\qquad \frac{d\Delta}{dt} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \ldots \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \ldots \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a'_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots a'_{3n} \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

In derselben Weise findet man

$$(9.)\qquad \frac{d\Delta}{dt} = \sum_r a'_{1r}\alpha_{1r} + \sum_r a'_{2r}\alpha_{2r} + \cdots + \sum_r a'_{nr}\alpha_{nr}.$$

Hier ist jedes Glied dieser Summe eine Determinante n^{ter} Ordnung, welche aus Δ entsteht, indem man die Elemente der f^{ten} Zeile, also die Elemente

$$a_{f1},\ a_{f2}, \dots a_{fn}$$

durch die Elemente

$$a'_{f1},\ a'_{f2}, \dots a'_{fn}$$

ersetzt.

Beispiel 1. Der Kürze wegen setze man

$$\frac{d^\nu a}{dt^\nu} = a^{(\nu)}, \quad \frac{d^\nu b}{dt^\nu} = b^{(\nu)}, \quad \frac{d^\nu c}{dt^\nu} = c^{(\nu)}, \dots, \tag{10.}$$

und es sei

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \dots a^{(n-1)} \\ b & b' & b'' \dots b^{(n-1)} \\ c & c' & c'' \dots c^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \tag{11.}$$

dann verschwinden bei Anwendung der Gleichung (8.) die ersten $n-1$ Determinanten wegen Gleichheit zweier Spalten, und man erhält in diesem Falle

$$\frac{d\Delta}{dt} = \begin{vmatrix} a & a' \dots a^{(n-2)} & a^{(n)} \\ b & b' \dots b^{(n-2)} & b^{(n)} \\ c & c' \dots c^{(n-2)} & c^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \tag{12.}$$

Beispiel 2. Es sei

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ t_1 & t_2 & \dots t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \dots t_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \dots t_n^{n-1} \end{vmatrix}, \tag{13.}$$

wobei die Größen $t_1, t_2, \dots t_n$ voneinander unabhängige Veränderliche sein mögen, dann wird nach Gleichung (8.)

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots 1 \\ 1 & t_2 & \dots t_n \\ 2t_1 & t_2^2 & \dots t_n^2 \\ 3t_1^2 & t_2^3 & \dots t_n^3 \\ \dots & \dots & \dots \\ (n-1)t_1^{n-2} & t_2^{n-1} & \dots t_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{14.}$$

In ähnlicher Weise findet man die partielle Ableitung nach t_α, indem man in der α^{ten} Spalte die Elemente

$$1,\ t_\alpha,\ t_\alpha^2,\ t_\alpha^3, \ldots t_\alpha^{n-1}$$

durch

$$0,\ 1,\ 2t_\alpha,\ 3t_\alpha^2, \ldots (n-1)t_\alpha^{n-2}$$

ersetzt.

§ 142.

Wiederholte Differentiation einer Funktion von mehreren Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 235.)

Der Kürze wegen bezeichnet man gewöhnlich die partiellen Ableitungen durch Indizes. Ist z. B.

$$z = f(x, y), \tag{1.}$$

so setzt man, wie schon früher hervorgehoben worden ist,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_1(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_2(x, y). \tag{2.}$$

Nun sind $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ im allgemeinen wieder Funktionen von x und y, die man nochmals nach den einzelnen Veränderlichen differentiieren kann. Dadurch erhält man, wenn man die Ableitungen wieder durch Indizes andeutet,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = f_{11}(x, y), & \dfrac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = f_{12}(x, y), \\[2ex] \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = f_{21}(x, y), & \dfrac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = f_{22}(x, y). \end{cases} \tag{3.}$$

Es gibt also im ganzen vier zweite partielle Ableitungen einer Funktion von zwei Veränderlichen.

Beispiel 1. Es sei

$$z = f(x, y) = x^2y^3 - 3x^4y + xy^4, \tag{4.}$$

so erhält man durch Differentiation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = 2xy^3 - 12x^3y + y^4, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = 3x^2y^2 - 3x^4 + 4xy^3, \end{cases} \tag{5.}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = f_{11}(x, y) = 2y^3 - 36x^2y, \\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = f_{12}(x, y) = 6xy^2 - 12x^3 + 4y^3, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = f_{21}(x, y) = 6xy^2 - 12x^3 + 4y^3, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = f_{22}(x, y) = 6x^2y + 12xy^2. \end{cases}$$

Beispiel 2. Es sei

$$(7.)\quad z = f(x, y) = \sin x \,.\, \ln y + e^y \,.\, \ln x,$$

dann erhält man durch Differentiation

$$(8.)\quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = \cos x \,.\, \ln y + \frac{e^y}{x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = \frac{\sin x}{y} + e^y \ln x, \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = f_{11}(x, y) = -\sin x \,.\, \ln y - \frac{e^y}{x^2}, \\ \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = f_{12}(x, y) = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = f_{21}(x, y) = \frac{\cos x}{y} + \frac{e^y}{x}, \\ \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = f_{22}(x, y) = -\frac{\sin x}{y^2} + e^y \,.\, \ln x. \end{cases}$$

In diesen beiden Beispielen wird

$$(10.)\quad f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y);$$

es soll gezeigt werden, daß diese Beziehung ganz allgemein gilt, wenn $f_{12}(x, y)$ und $f_{21}(x, y)$ stetige Funktionen von x und y sind.

Zum Beweise setze man

$$(11.)\quad \varphi(y) = f(x + h, y) - f(x, y),$$

also

$$(12.)\quad \varphi(y + k) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k).$$

Nun ist nach dem *Taylor*schen Lehrsatze (vgl. Formel Nr. 88 der Tabelle)

$$f(a + h) - f(a) = h \,.\, f'(a + \Theta h),$$

oder, wenn man die Buchstaben f, a, h bezw. mit φ, y, k vertauscht,

$$\varphi(y + k) - \varphi(y) = \varphi'(y + \Theta k) \,.\, k, \tag{13.}$$

also wenn man die Werte aus den Gleichungen (11.) und (12.) einsetzt,

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y) = [f_2(x + h, y + \Theta k) - f_2(x, y + \Theta k)] \,.\, k. \tag{13a.}$$

Setzt man ferner

$$\psi(x) = f(x, y + k) - f(x, y), \tag{14.}$$

also

$$\psi(x + h) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y), \tag{15.}$$

so folgt aus Formel Nr. 88 der Tabelle durch Vertauschung der Buchstaben f mit ψ und a mit x

$$\psi(x + h) - \psi(x) = \psi'(x + \Theta_1 h) \,.\, h, \tag{16.}$$

also wenn man die Werte aus den Gleichungen (14.) und (15.) einsetzt,

$$f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y) = [f_1(x + \Theta_1 h, y + k) - f_1(x + \Theta_1 h, y)] \,.\, h. \tag{16a.}$$

Durch Zusammenstellung dieser Gleichung mit Gleichung (13a.) erhält man

$$[f_1(x + \Theta_1 h, y + k) - f_1(x + \Theta_1 h, y)] \,.\, h = [f_2(x + h, y + \Theta k) - f_2(x, y + \Theta k)] \,.\, k, \tag{17.}$$

oder, wenn man auf die beiden Größen in den eckigen Klammern nochmals Formel Nr. 88 der Tabelle anwendet,

$$f_{12}(x + \Theta_1 h, y + \Theta_2 k) \,.\, hk = f_{21}(x + \Theta_3 h, y + \Theta k) \,.\, hk. \tag{18.}$$

Dabei sind h und k hinreichend kleine, aber sonst beliebige Größen. Deshalb ist auch

$$f_{12}(x + \Theta_1 h, y + \Theta_2 k) = f_{21}(x + \Theta_3 h, y + \Theta k). \tag{19.}$$

Läßt man jetzt h und k gleich Null werden, so erhält man, wenn die Funktionen $f_{12}(x, y)$ und $f_{21}(x, y)$ stetig sind,

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y), \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}. \tag{20.}$$

Dies gibt den Satz:

Wenn man unter den gegebenen Voraussetzungen eine Funktion

$$z = f(x, y)$$

zuerst partiell nach x und dann partiell nach y differentiiert, so findet man dasselbe Resultat, welches man finden würde, indem man zuerst partiell nach y und dann partiell nach x differentiiert; oder mit anderen Worten: *Die Reihenfolge, in welcher man die partiellen Differentiationen ausführt, ist gleichgültig.*

Dieser Satz läßt sich natürlich verallgemeinern, nicht nur auf die zweiten partiellen Ableitungen der Funktionen von beliebig vielen Veränderlichen, sondern auch auf höhere partielle Ableitungen. Setzt man nämlich

$$(21.)\quad \begin{cases} f_1(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial x}, & f_2(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ f_{11}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & f_{12}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \\ f_{21}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}, & f_{22}(x, y) = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \end{cases}$$

so erhält der eben ausgesprochene Satz die Fassung

$$(22.)\quad \frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

Bezeichnet man in entsprechender Weise mit $\dfrac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\, \partial y^n}$ den Ausdruck, welchen man erhält, indem man z zuerst m-mal partiell nach x und dann n-mal partiell nach y differentiiert, so gilt die Gleichung

$$(23.)\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2},$$

und wenn man in ähnlicher Weise fortfährt,

$$(24.)\quad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m\, \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n} z}{\partial y^n\, \partial x^m}.$$

Ebenso setzt man, wenn

$$z = f(u, v, w)$$

gegeben ist,

$$(25.)\quad \frac{\partial z}{\partial u} = f_1(u, v, w), \quad \frac{\partial z}{\partial v} = f_2(u, v, w), \quad \frac{\partial z}{\partial w} = f_3(u, v, w)$$

und kann diese Funktionen wieder nach jeder der drei Veränderlichen differentiieren. Dadurch erhält man

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial f_1(u, v, w)}{\partial u} = f_{11}(u, v, w), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial f_1(u, v, w)}{\partial v} = f_{12}(u, v, w),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial w} = \frac{\partial f_1(u, v, w)}{\partial w} = f_{13}(u, v, w), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial f_2(u, v, w)}{\partial u} = f_{21}(u, v, w),$$

. . . .

Auch hier läßt sich zeigen, daß

$$(26.)\quad \begin{cases} f_{12}(u, v, w) = f_{21}(u, v, w), \\ f_{13}(u, v, w) = f_{31}(u, v, w), \\ f_{23}(u, v, w) = f_{32}(u, v, w) \end{cases}$$

ist, allgemein, daß

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial u^m \partial v^n \partial w^p} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial v^n \partial u^m \partial w^p} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial w^p \partial u^m \partial v^n} \\ = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial u^m \partial w^p \partial v^n} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial v^n \partial w^p \partial u^m} = \dfrac{\partial^{m+n+p} z}{\partial w^p \partial v^n \partial u^m}. \end{cases}$$

§ 143.

Vollständige Differentiale höherer Ordnung.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 236.)

Es sei wieder

$$(1.)\quad z = f(x, y)$$

eine Funktion von zwei *unabhängigen* Veränderlichen, dann wird nach Formel Nr. 229 der Tabelle

$$(2.)\quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

das *erste* vollständige Differential von z. Dabei sind dx und dy zwei voneinander *und auch von x und y unabhängige,* unendlich kleine Größen.

Unter dem *zweiten vollständigen* Differential von z versteht man nun das vollständige Differential des ersten vollständigen Differentials und bezeichnet es mit d^2z.

Um d^2z zu bilden, braucht man also nur in Gleichung (2.) z mit dz zu vertauschen. Dadurch erhält man

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy. \tag{3.}$$

Weil nun aber dx und dy von x und y unabhängig sind, so findet man

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(dz)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dy, \\ \dfrac{\partial(dz)}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy. \end{cases} \tag{4.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit dx und dy und addiert sie dann, so erhält man

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{5.}$$

Wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung überall $\partial^2 z$ mit ∂z^2 vertauscht, so wird die rechte Seite ein vollständiges Quadrat, nämlich

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}dx\,dy + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2 \tag{6.}$$

Diesen Umstand benutzt man, um Gleichung (5.) auf eine einfachere Form zu bringen; man schreibt nämlich

$$d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(2)}, \tag{5a.}$$

wobei der eingeklammerte Exponent (2) bedeutet, daß man den Ausdruck $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ wirklich ins Quadrat erheben, dann aber überall ∂z^2 mit $\partial^2 z$ vertauschen soll.

Man sagt bei der Ausführung dieses Verfahrens, daß $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ „*symbolisch*" ins Quadrat erhoben werde.

Ebenso versteht man unter dem *dritten* vollständigen Differential von z, nämlich unter d^3z das erste vollständige

Differential des zweiten vollständigen Differentials. Es ist also

$$(7.)\qquad d^3z = d(d^2z) = \frac{\partial(d^2z)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^2z)}{\partial y}dy.$$

Nun ist aber nach Gleichung (5.)

$$(8.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(d^2z)}{\partial x}dx = \dfrac{\partial^3z}{\partial x^3}dx^3 + 2\dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + \dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2, \\ \dfrac{\partial(d^2z)}{\partial y}dy = \dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 2\dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \dfrac{\partial^3z}{\partial y^3}dy^3, \end{cases}$$

folglich ist

$$(9.)\quad d^3z = \frac{\partial^3z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3z}{\partial y^3}dy^3,$$

oder, wenn man wieder die symbolische Bezeichnungsweise benutzt,

$$(9a.)\qquad d^3z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(3)}.$$

Auch hier bedeutet der eingeklammerte Exponent (3), daß man $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ zuerst wirklich in die dritte Potenz erheben und dann überall ∂z^3 mit $\partial^3 z$ vertauschen soll.

So kann man fortfahren und findet für das m^{te} vollständige Differential

$$(10.)\qquad d^mz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(m)},$$

wobei man also $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ in die m^{te} Potenz erheben und dann ∂z^m mit $\partial^m z$ vertauschen soll.

Die Richtigkeit dieser Formel für einen beliebigen Wert von m wird durch den Schluß von n auf $n+1$ bewiesen. Nach dem binomischen Lehrsatze ist nämlich

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots,$$

oder

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k,$$

wobei das Summenzeichen Σ andeutet, daß k alle Werte von 0 bis n durchlaufen soll. Gilt also die Gleichung (10.) für $m = n$, so wird

$$d^n z = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k. \tag{11.}$$

Nun ist

$$d^{n+1} z = d(d^n z) = \frac{\partial(d^n z)}{\partial x} dx + \frac{\partial(d^n z)}{\partial y} dy;$$

dabei ergibt sich aus Gleichung (11.)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(d^n z)}{\partial x} dx = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-k+1} \partial y^k} dx^{n-k+1} dy^k, \\ \dfrac{\partial(d^n z)}{\partial y} dy = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n-k} \partial y^{k+1}} dx^{n-k} dy^{k+1}. \end{cases} \tag{12.}$$

Ersetzt man die Glieder auf der rechten Seite dieser beiden Gleichungen durch die entsprechenden in der symbolischen Darstellung, so erhält man

$$\begin{cases} \displaystyle\sum \binom{n}{k} \frac{\partial z^{n+1}}{\partial x^{n-k+1} \partial y^k} dx^{n-k+1} dy^k = \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} dx \displaystyle\sum \binom{n}{k} \frac{\partial z^n}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k = \frac{\partial z}{\partial x} dx \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^n \end{cases} \tag{13.}$$

und

$$\begin{cases} \displaystyle\sum \binom{n}{k} \frac{\partial z^{n+1}}{\partial x^{n-k} \partial y^{k+1}} dx^{n-k} dy^{k+1} = \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} dy \displaystyle\sum \binom{n}{k} \frac{\partial z^n}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k = \frac{\partial z}{\partial y} dy \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^n. \end{cases} \tag{14.}$$

Indem man die Gleichungen (12.) addiert, erhält man auf der linken Seite

$$\frac{\partial(d^n z)}{\partial x} dx + \frac{\partial(d^n z)}{\partial y} dy = d^{n+1} z, \tag{15.}$$

auf der rechten Seite dagegen, wenn man $\partial^{n+1} z$ mit ∂z^{n+1} vertauscht, mit Rücksicht auf die Gleichungen (13.) und (14.)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^n = \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^{n+1}, \tag{16.}$$

folglich ist unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise

(17.) $$d^{n+1}z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(n+1)}$$

Gilt also Gleichung (10.) für $m = n$, so gilt sie auch für $m = n + 1$.

Was in dem vorhergehenden für eine Funktion von *zwei* unabhängigen Veränderlichen gezeigt worden ist, kann man in ähnlicher Weise auch für Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen zeigen. Dadurch findet man für

(18.) $$z = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

zunächst in Übereinstimmung mit Formel Nr. 231 der Tabelle

(19.) $$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n$$

und durch wiederholte Differentiation

(20.) $$\begin{cases} d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d^mz = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(m)}. \end{cases}$$

Bei dem *ersten* vollständigen Differential von z war es gleichgültig, ob die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander unabhängig sind oder nicht, denn man erhielt, auch wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämtlich Funktionen von *einer* Veränderlichen t oder von *mehreren* Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots t_m$ waren,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n.$$

Bei den *höheren* vollständigen Differentialen aber bleiben die Gleichungen (20.) nur dann richtig, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander *unabhängig*, oder wenn sie *lineare* Funktionen von neuen unabhängigen Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots t_m$ sind. Ist z. B. wieder

(21.) $$z = f(x, y),$$

und sind

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

beide Funktionen einer neuen Veränderlichen t, so erhält man zunächst

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{22.}$$

Hierbei sind aber dx und dy nicht mehr voneinander unabhängige Größen, sondern es ist

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt. \tag{23.}$$

Deshalb kann man auch Gleichung (22.) auf die Form

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{24.}$$

bringen. Da z und $\frac{dz}{dt}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots$ als Funktionen der einzigen Veränderlichen t anzusehen sind, so erhält man durch nochmalige Differentiation nach t

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2}. \tag{25.}$$

Nun ist aber nach Gleichung (24.), indem man z bezw. mit $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder mit $\frac{\partial z}{\partial y}$ vertauscht,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{dt} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{dt} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}, \end{aligned}\right. \tag{26.}$$

folglich geht Gleichung (25.), wenn man wieder die symbolische Bezeichnungsweise anwendet, über in

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(2)} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2 y}{dt^2} \tag{27.}$$

Indem man beide Seiten der Gleichung mit dt^2 multipliziert, gibt dies

$$d^2 z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^{(2)} + \frac{\partial z}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2 y. \tag{27a.}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich also von der Gleichung (5a.) auch äußerlich dadurch, daß auf der rechten Seite noch die Glieder $\frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$ hinzugetreten sind.

Ist

$$z = f(u_1, u_2, \ldots u_n), \tag{28.}$$

und sind

$$u_1 = \varphi_1(t), \quad u_2 = \varphi_2(t), \ldots u_n = \varphi_n(t) \tag{29.}$$

sämtlich Funktionen einer neuen Veränderlichen t, so findet man in ähnlicher Weise

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n, \tag{30.}$$

$$\begin{aligned} d^2z = &\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(2)} \\ &+ \frac{\partial z}{\partial u_1}d^2u_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}d^2u_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}d^2u_n, \end{aligned} \tag{31.}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} du_1 &= \varphi_1'(t)dt, \quad du_2 = \varphi_2'(t)dt, \ldots du_n = \varphi_n'(t)dt, \\ d^2u_1 &= \varphi_1''(t)dt^2, \quad d^2u_2 = \varphi_2''(t)dt^2, \ldots d^2u_n = \varphi_n''(t)dt^2. \end{aligned}\right. \tag{32.}$$

Man erkennt aus den letzten Gleichungen leicht, unter welcher Bedingung die Größen

$$d^2u_1, \; d^2u_2, \ldots d^2u_n,$$

oder

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}, \; \frac{d^2u_2}{dt^2}, \ldots \frac{d^2u_n}{dt^2}$$

verschwinden. Dies geschieht, wenn

$$u_1 = a_1t + b_1, \quad u_2 = a_2t + b_2, \ldots u_n = a_nt + b_n \tag{33.}$$

lineare Funktionen von t sind. Dann wird nämlich

$$\frac{du_1}{dt} = a_1, \quad \frac{du_2}{dt} = a_2, \quad \ldots \frac{du_n}{dt} = a_n \tag{34.}$$

und

$$\frac{d^2u_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2u_2}{dt^2} = 0, \quad \ldots \frac{d^2u_n}{dt^2} = 0. \tag{35.}$$

In diesem Falle ist also wieder

$$(36.)\qquad d^2z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(2)},$$

oder

$$(37.)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(2)}.$$

Gerade dieser Fall wird aber in dem folgenden in Betracht kommen.

Gelten die Gleichungen (33.), so findet man jetzt auch ebenso wie früher

$$(38.)\qquad \frac{d^3z}{dt^3} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(3)},$$

. . . .

$$(39.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^mz}{dt^m} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1}\dfrac{du_1}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{dt} + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}\dfrac{du_n}{dt}\right)^{(m)} \\ \qquad = \left(\dfrac{\partial z}{\partial u_1}a_1 + \dfrac{\partial z}{\partial u_2}a_2 + \cdots + \dfrac{\partial z}{\partial u_n}a_n\right)^{(m)}. \end{cases}$$

§ 144.

Differentiation einer nicht entwickelten Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 237.)

Es sei z als Funktion von x und y durch die Gleichung

$$(1.)\qquad F(x, y, z) = 0$$

gegeben, die man sich auf die Form

$$(1a.)\qquad z = f(x, y)$$

gebracht denken kann. Wie bildet man dann $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$?

Setzt man

$$(2.)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = F_1,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2,\quad \frac{\partial F}{\partial z} = F_3$$

und beachtet, daß z eine Funktion von x und y ist, so folgt aus Gleichung (1.) durch partielle Differentiation nach x

$$(3.)\qquad \frac{\partial F[x, y, f(x, y)]}{\partial x} = F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{ oder } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1}{F_3},$$

und durch partielle Differentiation nach y

$$(4.)\qquad \frac{\partial F[x, y, f(x, y)]}{\partial y} = F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ oder } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2}{F_3}.$$

Beispiel.

Es sei

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

dann wird

$$F_1 = \frac{2x}{a^2}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2}, \quad F_3 = \frac{2z}{c^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}.$$

§ 145.

Nicht entwickelte Funktionen einer Veränderlichen, gegeben durch simultane Gleichungen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 238.)

Es kommt häufig vor, daß y und z als Funktionen der einen Veränderlichen x gegeben sind durch *zwei* Gleichungen

$$(1.)\qquad F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0,$$

welche *gleichzeitig* bestehen und deshalb „*simultan*“ genannt werden.

Jede der beiden Gleichungen für sich allein würde, geometrisch gedeutet, einer Fläche entsprechen; gelten sie aber gleichzeitig, so können ihnen nur die Koordinaten derjenigen Punkte genügen, welche auf beiden Flächen liegen, d. h. die Gleichungen (1.) stellen zusammen die *Schnittkurve* der beiden Flächen dar.

Eliminiert man aus den Gleichungen (1.) die Veränderliche z, so erhält man die Gleichung

$$(2.)\qquad H(x, y) = 0, \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dies ist die Gleichung eines Zylinders, welcher die Schnittkurve in die XY-Ebene projiziert. Eliminiert man aber aus den Gleichungen (1.) die Veränderliche y, so erhält man die Gleichung

$$K(x, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = g(x). \tag{3.}$$

Dies ist die Gleichung eines Zylinders, welcher die Schnittkurve in die XZ-Ebene projiziert. Da die Raumkurve, welche durch die beiden Gleichungen (1.) erklärt wird, auf diesen beiden Zylindern liegt, so ist sie auch die Schnittkurve dieser beiden Zylinder oder wenigstens ein Teil davon, denn die Zylinder können möglicherweise auch noch Punkte gemeinsam haben, die *nicht* auf der gegebenen Kurve liegen.

Es kommt hier zunächst nicht auf diese geometrische Deutung an, es sollte vielmehr die vorstehende Untersuchung nur zeigen, daß man y und z als Funktionen der *einzigen* unabhängigen Veränderlichen x betrachten darf. Deshalb ist es auch möglich, y und z als Funktionen von x zu differentiieren, und zwar kann man $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ auch berechnen, ohne die Gleichungen (2.) und (3.) wirklich zu bilden.

Dies geschieht, indem man auf die Gleichungen (1.) die Regeln anwendet, welche in Formel Nr. 231 der Tabelle ausgesprochen sind, wobei man aber in diesem Falle die drei Veränderlichen u_1, u_2, u_3 bezw. mit x, y, z und die unabhängige Veränderliche t, von der u_1, u_2, u_3 abhängig sind, mit x vertauschen muß. Dadurch erhält man

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0,$$

oder, wenn man wieder $\frac{\partial F}{\partial x}$ mit F_1, $\frac{\partial F}{\partial y}$ mit F_2, $\frac{\partial F}{\partial z}$ mit F_3 bezeichnet,

$$F_1 + F_2\frac{dy}{dx} + F_3\frac{dz}{dx} = 0. \tag{4.}$$

Ebenso findet man

$$G_1 + G_2\frac{dy}{dx} + G_3\frac{dz}{dx} = 0. \tag{5.}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich jetzt sehr leicht durch Elimination

$$(6.)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_2G_3 - F_3G_2} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{F_1G_2 - F_2G_1}{F_2G_3 - F_3G_2}.$$

Mit demselben Rechte, mit welchem in dem vorstehenden x als die unabhängige Veränderliche betrachtet wurde, kann man auch y als die unabhängige Veränderliche ansehen. Dadurch werden x und z Funktionen von y, und man erhält in Übereinstimmung mit den Gleichungen (6.)

$$(7.)\quad \frac{dx}{dy} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_3G_1 - F_1G_3} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{F_1G_2 - F_2G_1}{F_3G_1 - F_1G_3}.$$

Macht man z zur unabhängigen Veränderlichen, so erhält man

$$(8.)\quad \frac{dx}{dz} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Man kann die Gleichungen (6.), (7.) und (8.) zusammenfassen in der Formel

$$(9.)\quad dx : dy : dz = (F_2G_3 - F_3G_2) : (F_3G_1 - F_1G_3) : (F_1G_2 - F_2G_1),$$

oder

$$(9\text{a.})\quad dx : dy : dz = \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}$$

Übungs-Beispiele für den Gebrauch dieser Formeln finden sich bei den geometrischen Anwendungen in den folgenden Paragraphen.

XIX. Abschnitt.

Anwendungen auf die analytische Geometrie des Raumes*).

§ 146.

Bestimmung der Tangenten und der Normalebenen bei einer Kurve im Raume.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 239 bis 242a.)

Erklärung. Die Kurven im Raume können *ebene Kurven* oder auch *Kurven doppelter Krümmung* sein. Unter einer *Kurve doppelter Krümmung* versteht man eine Kurve, deren Punkte nicht alle in derselben Ebene liegen.

Im folgenden wird daher der Kürze wegen der Ausdruck „Raumkurve" beide Fälle umfassen.

Aufgabe 1. Man soll das Bogenelement ds einer Raumkurve bestimmen und die Kosinusse der Winkel α, β, γ berechnen, welche ds mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet.

Auflösung. Es seien P und P_1 zwei benachbarte Punkte auf der Kurve mit den Koordinaten x, y, z bezw.

$$(1.)\qquad x_1 = x + dx,\quad y_1 = y + dy,\quad z_1 = z + dz,$$

wo wieder die Bezeichnungen dx, dy, dz andeuten sollen, daß die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken dürfen.

Legt man jetzt durch die Punkte P und P_1 Ebenen parallel zu den drei Koordinaten-Ebenen (vgl. Fig. 153), so

*) Die elementaren Untersuchungen aus der analytischen Geometrie des Raumes müssen hier als bekannt vorausgesetzt werden.

erhält man ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Seitenkanten dx, dy, dz und der Diagonale

$$\overline{PP_1} = ds. \tag{2.}$$

Da die Sehne PP_1 mit dem Bogen PP_1 zusammenfällt, wenn die Punkte P und P_1 einander unendlich nahe rücken, so nennt man ds das *„Bogenelement"* und erhält nach bekannten Sätzen aus der Stereometrie

Fig. 158.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3.}$$

Ferner ergibt sich ohne weiteres aus der Figur, daß

$$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \dfrac{dy}{ds}, \\ \qquad \cos\gamma = \dfrac{dz}{ds} \end{array}\right. \tag{4.}$$

ist, wobei α, β, γ die Winkel sind, welche das Bogenelement



ds mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet.

Aufgabe 2. Eine Raumkurve sei durch die Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \tag{5.}$$

gegeben; man soll im Kurvenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z ihre Tangente bestimmen.

Auflösung. Die Gleichungen einer geraden Linie im Raume schreibt man gewöhnlich in der Form

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu. \tag{6.}$$

Dies seien also auch die Gleichungen der gesuchten Tangente, wobei die laufenden Koordinaten mit x', y', z' bezeichnet werden mögen, weil x, y, z die Koordinaten des Berührungspunktes P sind. Damit die Tangente durch diesen Punkt P geht, müssen die Gleichungen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu \tag{7.}$$

gelten, folglich erhält man für die Tangente die Gleichungen

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z). \tag{8.}$$



Um noch die Koeffizienten m und n zu bestimmen, beachte man, daß die Tangente auch durch den Kurvenpunkt P_1 hindurchgehen muß, welcher dem Punkte P unendlich nahe liegt und deshalb die Koordinaten

$$(9.)\qquad x_1 = x + dx,\quad y_1 = y + dy,\quad z_1 = z + dz$$

hat. Setzt man diese Werte in die Gleichungen (8.) ein, so erhält man

$$(10.)\qquad dx = m dz,\quad dy = n dz,$$

oder, indem man durch dz dividiert und Formel Nr. 238 der Tabelle berücksichtigt,

$$(11.)\quad m = \frac{dx}{dz} = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1},\quad n = \frac{dy}{dz} = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Die Tangente im Punkte P hat daher die Gleichungen

$$(12.)\quad x' - x = \frac{dx}{dz}(z' - z),\quad y' - y = \frac{dy}{dz}(z' - z),$$

oder

$$(12a.)\ x' - x = \frac{F_2G_3 - F_3G_2}{F_1G_2 - F_2G_1}(z' - z),\ y' - y = \frac{F_3G_1 - F_1G_3}{F_1G_2 - F_2G_1}(z' - z).$$

Gewöhnlich schreibt man diese Gleichungen in der Form

$$(13.)\qquad \frac{x' - x}{dx} = \frac{y' - y}{dy} = \frac{z' - z}{dz},$$

oder

$$(13a.)\quad \frac{x' - x}{F_2G_3 - F_3G_2} = \frac{y' - y}{F_3G_1 - F_1G_3} = \frac{z' - z}{F_1G_2 - F_2G_1}.$$

Da die Ausdrücke

$$F_1(F_2G_3 - F_3G_2) + F_2(F_3G_1 - F_1G_3) + F_3(F_1G_2 - F_2G_1)$$

und

$$G_1(F_2G_3 - F_3G_2) + G_2(F_3G_1 - F_1G_3) + G_3(F_1G_2 - F_2G_1)$$

identisch gleich Null sind, wie man durch Auflösen der Klammern zeigen kann, so folgt aus den Gleichungen (12a.)

$$(14.)\quad \begin{cases} F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0, \\ G_1(x' - x) + G_2(y' - y) + G_3(z' - z) = 0. \end{cases}$$

Bei den Anwendungen wird diese Form für die Gleichungen der Tangente in der Regel am leichtesten aus den Gleichungen (5.) herzuleiten sein. Wie in § 152 gezeigt

werden wird, stellen die Gleichungen (14.) einzeln die Tangentialebenen der beiden Flächen

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

im gemeinsamen Punkte P dar; ihre Zusammenstellung gibt dann die Schnittlinie dieser beiden Tangentialebenen, nämlich die Tangente an die Schnittkurve der beiden Flächen im Punkte P.

Aufgabe 3. Man soll die Ebene bestimmen, welche im Kurvenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z auf der Kurve senkrecht steht.

Auflösung. Die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt P hindurchgeht, ist

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0. \tag{15.}$$

Damit diese Ebene auf einer Geraden

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu$$

senkrecht steht, muß nach bekannten Sätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes

$$m = \frac{A}{C}, \quad n = \frac{B}{C} \tag{16.}$$

sein. In dem vorliegenden Falle ist aber die Tangente die Gerade, welche auf der gesuchten Ebene senkrecht stehen soll, folglich gehen die Gleichungen (16.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.) über in

$$\frac{dx}{dz} = \frac{A}{C}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B}{C}, \tag{16a.}$$

so daß man für die gesuchte Ebene die Gleichung

$$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0, \tag{17.}$$

oder

$$(F_2G_3 - F_3G_2)(x' - x) + (F_3G_1 - F_1G_3)(y' - y) + (F_1G_2 - F_2G_1)(z' - z) = 0 \tag{17a.}$$

erhält. Diese Ebene heißt die „*Normalebene*“ der Raumkurve im Punkte P.

Eine Kurve im Raume kann auch durch drei Gleichungen von der Form

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \tag{18.}$$

gegeben sein. Auf drei solche Gleichungen wird man z. B. geführt, wenn man aus den Gleichungen (5.) in der früher beschriebenen Weise (Gleichung (2.) und (3.) in § 145) die Gleichungen

$$y = f(x), \quad z = g(x) \tag{19.}$$

ableitet, die Funktion $x = f_1(t)$ nach Belieben annimmt (z. B. $x = t$ macht) und diesen Wert von x in die Gleichungen (18.) einsetzt. Dann kann man die *Gleichungen der Tangente* im Kurvenpunkte P ohne weiteres auf die Form

$$\frac{x' - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y' - y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z' - z}{\frac{dz}{dt}} \tag{13b.}$$

und die *Gleichung der Normalebene* auf die Form

$$(x' - x)\frac{dx}{dt} + (y' - y)\frac{dy}{dt} + (z' - z)\frac{dz}{dt} = 0 \tag{17b.}$$

bringen.

§ 147.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Der Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{1.}$$

schneidet die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0 \tag{2.}$$

in einer Raumkurve; man soll die Tangente und die Normalebene dieser Kurve im Punkte P bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, \quad G = x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2, \tag{3.}$$

folglich wird

$$\begin{cases} F_1 = \frac{2x}{a^2}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2}, \quad F_3 = -\frac{2z}{c^2}, \\ G_1 = 2x, \quad G_2 = 2y, \quad G_3 = 2z, \end{cases} \tag{4.}$$

also

$$(5.)\quad \begin{cases} F_2G_3 - F_3G_2 = \dfrac{4yz}{b^2} + \dfrac{4yz}{c^2} = \dfrac{4yz}{b^2c^2}(b^2 + c^2), \\ F_3G_1 - F_1G_3 = -\dfrac{4xz}{c^2} - \dfrac{4xz}{a^2} = -\dfrac{4zx}{c^2a^2}(c^2 + a^2), \\ F_1G_2 - F_2G_1 = \dfrac{4xy}{a^2} - \dfrac{4xy}{b^2} = -\dfrac{4xy}{a^2b^2}(a^2 - b^2). \end{cases}$$

Dies gibt nach Formel Nr. 241 der Tabelle für die Tangente die Gleichungen

$$(6.)\quad \frac{b^2c^2(x' - x)}{yz(b^2 + c^2)} = -\frac{c^2a^2(y' - y)}{zx(c^2 + a^2)} = -\frac{a^2b^2(z' - z)}{xy(a^2 - b^2)},$$

oder

$$(7.)\quad \begin{cases} c^2(a^2 - b^2)x(x' - x) = -a^2(b^2 + c^2)z(z' - z), \\ c^2(a^2 - b^2)y(y' - y) = +b^2(c^2 + a^2)z(z' - z). \end{cases}$$

Einfacher findet man aus den Gleichungen (14.) in § 146

$$(8.)\quad \frac{x(x' - x)}{a^2} + \frac{y(y' - y)}{b^2} - \frac{z(z' - z)}{c^2} = 0,$$

$$(9.)\quad x(x' - x) + y(y' - y) + z(z' - z) = 0.$$

Addiert man noch die Gleichung (1.) zu (8.) und die Gleichung (2.) zu (9.), so erhält man

$$(10.)\quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 0,$$

$$(11.)\quad xx' + yy' + zz' - \varrho^2 = 0.$$

Daraus folgen für die Tangente noch die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} c^2(b^2 - a^2)xx' = a^2(b^2 + c^2)zz' - a^2c^2\varrho^2, \\ c^2(a^2 - b^2)yy' = b^2(a^2 + c^2)zz' - b^2c^2\varrho^2. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (5.) folgt sodann nach Formel Nr. 242 der Tabelle für die Normalebene die Gleichung

$$\frac{4yz}{b^2c^2}(b^2 + c^2)(x' - x) - \frac{4zx}{c^2a^2}(c^2 + a^2)(y' - y) \\ - \frac{4xy}{a^2b^2}(a^2 - b^2)(z' - z) = 0,$$

oder

$$(13.)\quad a^2yz(b^2+c^2)(x'-x)-b^2zx(c^2+a^2)(y'-y) \\ -c^2xy(a^2-b^2)(z'-z)=0,$$

oder

$$(13a.)\quad a^2(b^2+c^2)yzx'-b^2(c^2+a^2)zxy'-c^2(a^2-b^2)xyz'=0.$$

Die Normalebenen gehen daher sämtlich durch den Nullpunkt.

Aufgabe 2. Die gemeine Schraubenlinie hat die Gleichungen

$$(14.)\quad x^2+y^2-a^2=0,\quad y-x\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right)=0,$$

oder

$$(14a.)\quad x=a\cos\varphi,\quad y=a\sin\varphi,\quad z=c\varphi;$$

man soll die Tangente und die Normalebene im Kurvenpunkte P bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$(15.)\quad F=x^2+y^2-a^2,\quad G=y-x\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right),$$

folglich wird

$$(16.)\quad F_1=2x,\qquad F_2=2y,\quad F_3=0;$$

$$(17.)\quad G_1=-\operatorname{tg}\left(\frac{z}{c}\right),\quad G_2=1,\quad G_3=-\frac{x}{c}\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{z}{c}\right)\right],$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (14.)

$$(17a.)\quad G_1=-\frac{y}{x},\quad G_2=1,\quad G_3=-\frac{x}{c}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=-\frac{a^2}{cx}.$$

Dies gibt

$$(18.)\quad \begin{cases} F_2G_3-F_3G_2=-\dfrac{2a^2y}{cx}, \\ F_3G_1-F_1G_3=+\dfrac{2a^2x}{cx}=\dfrac{2a^2}{c}, \\ F_1G_2-F_2G_1=2x+\dfrac{2y^2}{x}=\dfrac{2a^2}{x}=\dfrac{2a^2c}{cx}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Tangente sind daher nach Formel Nr. 241 der Tabelle

$$-\frac{cx(x'-x)}{2a^2y}=\frac{cx(y'-y)}{2a^2x}=\frac{cx(z'-z)}{2a^2c},$$

oder

$$(19.)\qquad x' - x = -\frac{y}{c}(z' - z), \quad y' - y = \frac{x}{c}(z' - z).$$

Die Gleichung der Normalebene wird nach Formel Nr. 242 der Tabelle

$$-\frac{2a^2y}{cx}(x' - x) + \frac{2a^2x}{cx}(y' - y) + \frac{2a^2c}{cx}(z' - z) = 0,$$

oder

$$(20.)\qquad y(x' - x) - x(y' - y) - c(z' - z) = 0,$$

oder

$$(20\text{a.})\qquad yx' - xy' - c(z' - z) = 0.$$

Weit einfacher findet man diese Resultate, wenn man von den Gleichungen (14a.) ausgeht, aus welchen sich ohne weiteres

$$(21.)\qquad \frac{dx}{d\varphi} = -a\sin\varphi = -y, \quad \frac{dy}{d\varphi} = a\cos\varphi = x, \quad \frac{dz}{d\varphi} = c$$

ergibt. Deshalb erhält man aus Formel Nr. 241a der Tabelle für die *Gleichungen der Tangente* in Übereinstimmung mit den Gleichungen (19.)

$$(22.)\qquad -\frac{x' - x}{y} = \frac{y' - y}{x} = \frac{z' - z}{c}$$

und nach Formel Nr. 242a der Tabelle für die *Gleichung der Normalebene* in Übereinstimmung mit Gleichung (20.)

$$(23.)\qquad -y(x' - x) + x(y' - y) + c(z' - z) = 0,$$

oder

$$xy' - yx' + c(z' - z) = 0.$$

Dabei ist noch

$$(24.)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + c^2)d\varphi^2,$$

also

$$(25.)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = -\dfrac{a\sin\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \cos\beta = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \\ \qquad\qquad \cos\gamma = \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \end{cases}$$

Der Winkel γ, d. h. die Neigung der Tangente gegen die Z-Achse, ist konstant. Deshalb ist auch die Neigung der Tangente gegen die XY-Ebene konstant.

Aufgabe 3. Die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{26.}$$

wird von dem Zylinder

$$x^2 - ax + y^2 = 0 \tag{27.}$$

durchbohrt (vgl. Fig. 156 auf Seite 693); man soll die Tangente und die Normalebene der Schnittkurve im Punkte P mit den Koordinaten x, y, z bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F = x^2 + y^2 + z^2 - a^2, \quad G = x^2 - ax + y^2, \tag{28.}$$

folglich wird

$$\begin{cases} F_1 = 2x, & F_2 = 2y, \quad F_3 = 2z, \\ G_1 = 2x - a, & G_2 = 2y, \quad G_3 = 0, \end{cases} \tag{29.}$$

also

$$\begin{cases} F_2G_3 - F_3G_2 = -4yz, \\ F_3G_1 - F_1G_3 = 4xz - 2az, \\ F_1G_2 - F_2G_1 = 4xy - 4xy + 2ya = 2ay; \end{cases} \tag{30.}$$

dies gibt nach Formel Nr. 241 der Tabelle für die Tangente die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{-2yz} = \frac{y' - y}{z(2x - a)} = \frac{z' - z}{ay}, \tag{31.}$$

oder

$$\begin{cases} a(x' - x) = -2z(z' - z), \\ ay(y' - y) = (2x - a)z(z' - z). \end{cases} \tag{32.}$$

Die Gleichung der Normalebene wird nach Formel Nr. 242 der Tabelle

$$yz(x' - x) - (2x - a)z(y' - y) - ay(z' - z) = 0, \tag{33.}$$

oder

$$2yzx' - (2x - a)zy' - ayz' = 0. \tag{33a.}$$

Noch einfacher findet man diese Resultate, wenn man

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos\varphi) = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{34.}$$

setzt; dann folgt aus Gleichung (27.)

$$y = \frac{a}{2}\sin\varphi = a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{35.}$$

und aus Gleichung (26.)

$$(36.)\qquad z = a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dadurch erhält man

$$(37.)\quad \frac{dx}{d\varphi} = -\frac{a}{2}\sin\varphi,\quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{a}{2}\cos\varphi,\quad \frac{dz}{d\varphi} = \frac{a}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Dies gibt nach Formel Nr. 241a der Tabelle in Übereinstimmung mit den Gleichungen (31.) für die Tangente die Gleichungen

$$(38.)\qquad -\frac{x'-x}{\sin\varphi} = \frac{y'-y}{\cos\varphi} = \frac{z'-z}{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Für die Normalebene findet man in Übereinstimmung mit Gleichung (33.) nach Formel Nr. 242a der Tabelle die Gleichung

$$(39.)\quad -\sin\varphi(x'-x) + \cos\varphi(y'-y) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)(z'-z) = 0,$$

oder

$$(39\text{a.})\qquad -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi + z'\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0.$$

§ 148.

Schmiegungsebene, Hauptnormale und Binormale.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 243 bis 247.)

Jede Ebene, welche durch die Tangente der Raumkurve im Punkte P gelegt werden kann, ist eine *Tangentialebene* der Kurve in diesem Punkte. Unter allen diesen unendlich vielen Tangentialebenen gibt es eine, die sich der Kurve im Punkte P am engsten anschmiegt und deshalb *„Schmiegungsebene“* genannt wird. Diese Ebene geht nicht nur durch die beiden unendlich nahen Punkte P und P_1 der Raumkurve, sondern noch durch einen dritten unendlich nahen Punkt P_2.

Um die Gleichung der Schmiegungsebene zu finden, nehme man an, daß die Raumkurve durch die drei Gleichungen

(1.) $$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

gegeben sei, und betrachte die Kurvenpunkte P, P_1, P_2, welche den Werten

$$t, \quad t_1 = t + \Delta t, \quad t_2 = t + 2\Delta t$$

zugeordnet sind. Dann wird

(2.) $$x_1 = f_1(t_1), \quad y_1 = f_2(t_1), \quad z_1 = f_3(t_1),$$

(3.) $$x_2 = f_1(t_2), \quad y_2 = f_2(t_2), \quad z_2 = f_3(t_2).$$

Soll die Ebene mit der Gleichung

(4.) $$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

durch die drei Punkte P, P_1, P_2 gehen, so müssen die drei Gleichungen

(5.) $$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \end{cases}$$

gelten. Dadurch kann man die Gleichung der Ebene auf die Form

(6.) $$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0$$

bringen, wobei x', y', z' die laufenden Koordinaten sind.

Bezeichnet man jetzt der Kürze wegen $Ax + By + Cz + D$ mit $F(x, y, z)$ und beachtet die Gleichungen (1.) bis (3.), so wird $F(x, y, z)$ eine Funktion $G(t)$ von t. Dadurch gehen die Gleichungen (5.) über in

(7.) $$\begin{cases} F(x, y, z) = G(t) = 0, \\ F(x_1, y_1, z_1) = G(t_1) = 0, \\ F(x_2, y_2, z_2) = G(t_2) = 0. \end{cases}$$

Deshalb gelten auch die Gleichungen

(8.) $$\frac{G(t_1) - G(t)}{t_1 - t} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{G(t_1) - G(t)}{t_1 - t} = 0.$$

Nun ist, wenn man

$$t_2 - t_1 = t_1 - t = \Delta t$$

setzt und die Formeln Nr. 16 und 82a der Tabelle beachtet,

$$\lim_{t_1=t} \frac{G(t_1) - G(t)}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t=0} \frac{G(t + \Delta t) - G(t)}{\Delta t} = \frac{dG(t)}{dt},$$

$$\frac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{G(t_1) - G(t)}{t_1 - t} = \frac{G(t + 2\Delta t) - 2G(t + \Delta t) + G(t)}{\Delta t},$$

$$\lim_{\Delta t=0} \frac{G(t + 2\Delta t) - 2G(t + \Delta t) + G(t)}{\Delta t^2} = \frac{d^2G(t)}{dt^2}.$$

Die Gleichungen (8.) gehen daher nach Formel Nr. 231 der Tabelle über in

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{dF(x, y, z)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt} + C\frac{dz}{dt} = 0 \tag{9.}$$

und

$$\frac{d^2G(t)}{dt^2} = A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{d^2y}{dt^2} + C\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{10.}$$

über. Dies gibt, wenn man Gleichung (9.) mit dt und Gleichung (10.) mit dt^2 multipliziert,

$$\begin{cases} Adx + Bdy + Cdz = 0, \\ Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0. \end{cases} \tag{11.}$$

Daraus findet man

$$\frac{A}{C} = \frac{dyd^2z - dzd^2y}{dxd^2y - dyd^2x}, \quad \frac{B}{C} = \frac{dzd^2x - dxd^2z}{dxd^2y - dyd^2x}. \tag{12.}$$

Setzt man also

$$\begin{cases} dyd^2z - dzd^2y = P^{*)}, \\ dzd^2x - dxd^2z = Q, \\ dxd^2y - dyd^2x = R, \end{cases} \tag{13.}$$

so kann man

$$A = P, \quad B = Q, \quad C = R \tag{14.}$$

setzen und findet für die Schmiegungsebene die Gleichung

$$P(x' - x) + Q(y' - y) + R(z' - z) = 0. \tag{15.}$$

Die Gerade, in welcher die Normalebene von der Schmiegungsebene geschnitten wird, heißt „*Hauptnormale*“; ihre Gleichungen sind also

*) Mit P ist außerdem der betrachtete Punkt der Raumkurve bezeichnet worden; die beiden Bedeutungen von P dürfen nicht miteinander verwechselt werden.

$$\left\{\begin{array}{l}(x'-x)dx+(y'-y)dy+(z'-z)dz=0,\\ P(x'-x)+Q(y'-y)+R(z'-z)\ =0,\end{array}\right. \tag{16.}$$

oder, wenn man $y'-y$, bezw. $x'-x$ eliminiert,

$$\left|\begin{array}{l}x'-x=\dfrac{Qdz-Rdy}{Pdy-Qdx}(z'-z),\\[2ex] y'-y=\dfrac{Rdx-Pdz}{Pdy-Qdx}(z'-z),\end{array}\right. \tag{17.}$$

oder

$$\frac{x'-x}{Qdz-Rdy}=\frac{y'-y}{Rdx-Pdz}=\frac{z'-z}{Pdy-Qdx}. \tag{17a.}$$

Die Gerade, welche auf der Schmiegungsebene im Punkte P senkrecht steht, heißt „*Binormale*"; ihre Gleichungen haben die Form

$$x'-x=m(z'-z),$$
$$y'-y=n(z'-z),$$

wobei bekanntlich

$$m=\frac{P}{R},\quad n=\frac{Q}{R}$$

sein muß; dies gibt

$$x'-x=\frac{P}{R}(z'-z),\quad y'-y=\frac{Q}{R}(z'-z), \tag{18.}$$

oder

$$\frac{x'-x}{P}=\frac{y'-y}{Q}=\frac{z'-z}{R}. \tag{19.}$$

Es seien wieder α, β, γ die Winkel, welche die Tangente im Kurvenpunkte P mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, dann ist nach Formel Nr. 240 der Tabelle

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}. \tag{20.}$$

Mit α', β', γ' mögen die Winkel bezeichnet werden, welche die Binormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, dann ist, wenn man

$$P^2+Q^2+R^2=M^2 \tag{21.}$$

setzt,

(22.) $$\cos\alpha' = \frac{P}{M}, \quad \cos\beta' = \frac{Q}{M}, \quad \cos\gamma' = \frac{R}{M} \text{*)}.$$

Mit α'', β'', γ'' mögen die Winkel bezeichnet werden, welche die Hauptnormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet. Um die Kosinusse dieser Winkel zu berechnen, beachte man, daß aus Gleichung (15.) für $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$ unmittelbar

(23.) $$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

folgt, und daß mit Rücksicht auf Gleichung (21.)

(24.) $$\begin{aligned}(Qdz - Rdy)^2 + (Rdx - Pdz)^2 + (Pdy - Qdx)^2 \\ = (P^2 + Q^2 + R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (Pdx + Qdy + Rdz)^2 \\ = (P^2 + Q^2 + R^2)ds^2 = M^2ds^2\end{aligned}$$

wird. Deshalb findet man ohne weiteres aus den Gleichungen (17.)

(25.) $$\cos\alpha'' = \frac{Qdz - Rdy}{Mds}, \quad \cos\beta'' = \frac{Rdx - Pdz}{Mds},$$
$$\cos\gamma'' = \frac{Pdy - Qdx}{Mds}.$$

---

*) Um die Winkel α, β, γ zu bestimmen, die eine Gerade g mit den Gleichungen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu$$

mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, legt man durch den Nullpunkt die Gerade g' parallel zu g; dann hat g' die Gleichungen

$$x = mz, \quad y = nz.$$

Ist dann P ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten x, y, z auf g', und legt man durch P Ebenen parallel zu den Koordinaten-Ebenen, so findet man aus dem dadurch entstehenden Parallelepipedon, dessen Diagonale $OP = r$ ist,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{mz}{\sqrt{m^2z^2 + n^2z^2 + z^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}},$$

und in ähnlicher Weise

$$\cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}.$$

§ 149.

Krümmungskreis und Kontingenzwinkel, Torsionswinkel und Halbmesser der zweiten Krümmung.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 248 bis 251.)

Der Kreis, welcher durch drei unendlich nahe Punkte P, P_1, P_2 der Raumkurve hindurchgeht, wird auch hier *„Krümmungskreis"* genannt.

Die Gleichungen eines Kreises im Raume sind bekanntlich

$$A(x' - \xi) + B(y' - \eta) + C(z' - \zeta) = 0, \tag{1.}$$

$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2 - \varrho^2 = 0. \tag{2.}$$

Dabei stellt Gleichung (1.) die Ebene des Kreises dar, und Gleichung (2.) die Gleichung einer Kugel mit dem Halbmesser ϱ, deren Mittelpunkt M die Koordinaten ξ, η, ζ hat. Der Krümmungskreis hat dann ebenfalls den Mittelpunkt M und den Halbmesser ϱ.

Da die Ebene des Kreises mit der Schmiegungsebene, welche durch die drei unendlich nahen Punkte P, P_1, P_2 hindurchgeht, zusammenfällt, so wird

$$A = P, \quad B = Q, \quad C = R,$$

so daß Gleichung (1.) übergeht in

$$P(x' - \xi) + Q(y' - \eta) + R(z' - \zeta) = 0. \tag{3.}$$

Um auch noch die Größen ξ, η, ζ und ϱ zu berechnen, bezeichnet man in diesem Falle $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - \varrho^2$ mit $F(x, y, z)$ und betrachtet x, y, z wieder als Funktionen von t. Dadurch wird auch $F(x, y, z)$ eine Funktion $G(t)$ von t.

Damit nun die Kugelfläche durch die drei Punkte P, P_1, P_2 geht, müssen die drei Gleichungen

$$F(x, y, z) = G(t) = 0, \tag{4.}$$

$$F(x_1, y_1, z_1) = G(t_1) = 0, \tag{5.}$$

$$F(x_2, y_2, z_2) = G(t_2) = 0 \tag{6.}$$

gelten. Daraus folgen wieder (wie in § 148) die Gleichungen

(7.) $\dfrac{G(t_1) - G(t)}{t_1 - t} = 0$ und $\dfrac{G(t_2) - G(t_1)}{t_2 - t_1} - \dfrac{G(t_1) - G(t)}{t_1 - t} = 0,$

aus denen man, wenn

$$t_2 - t_1 = t_1 - t = \Delta t$$

verschwindend klein wird, die Gleichungen

(8.) $$\frac{dG(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d^2G(t)}{dt^2} = 0$$

findet. In dem vorliegenden Falle wird

$$2(x - \xi)\frac{dx}{dt} + 2(y - \eta)\frac{dy}{dt} + 2(z - \zeta)\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + 2(x - \xi)\frac{d^2x}{dt^2} + 2(y - \eta)\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+ 2(z - \zeta)\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

oder

(9.) $$(x - \xi)dx + (y - \eta)dy + (z - \zeta)dz = 0,$$

(10.) $$(x - \xi)d^2x + (y - \eta)d^2y + (z - \zeta)d^2z + ds^2 = 0.$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen $(x - \xi)$, und setzt man wieder

$$dyd^2z - dzd^2y = P, \quad dzd^2x - dxd^2z = Q,$$
$$dxd^2y - dyd^2x = R,$$

so erhält man

(11.) $$R(y - \eta) - Q(z - \zeta) + dxds^2 = 0$$

und in ähnlicher Weise

(12.) $$P(z - \zeta) - R(x - \xi) + dyds^2 = 0,$$

(13.) $$Q(x - \xi) - P(y - \eta) + dzds^2 = 0,$$

oder

(14.) $$P(y - \eta) = Q(x - \xi) + dzds^2,$$

(15.) $$P(z - \zeta) = R(x - \xi) - dyds^2.$$

Da die Schmiegungsebene gleichfalls durch den Punkt P hindurchgeht, so wird

(16.) $$P(x - \xi) + Q(y - \eta) + R(z - \zeta) = 0.$$

Hieraus findet man durch Einsetzen der Werte von $y - \eta$ und $z - \zeta$ aus den Gleichungen (14.) und (15.)

$$(17.)\qquad (P^2 + Q^2 + R^2)(x - \xi) = (Rdy - Qdz)ds^2,$$

oder, wenn man $P^2 + Q^2 + R^2$ wieder mit M^2 bezeichnet,

$$(18.)\qquad x - \xi = \frac{(Rdy - Qdz)ds^2}{M^2}.$$

In derselben Weise findet man

$$(19.)\qquad y - \eta = \frac{(Pdz - Rdx)ds^2}{M^2}, \quad z - \zeta = \frac{(Qdx - Pdy)ds^2}{M^2};$$

folglich wird mit Rücksicht auf Gleichnng (24.) in § 148

$$(20.)\qquad \varrho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = \frac{M^2 ds^6}{M^4} = \frac{ds^6}{M^2},$$

oder

$$(21.)\qquad \varrho = \pm \frac{ds^3}{M}.$$

In dieser Formel ist auch der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ϱ bei einer *ebenen* Kurve als besonderer Fall enthalten; denn bei einer ebenen Kurve in der XY-Ebene wird

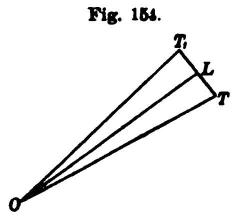
$$z = 0, \quad \text{also auch} \quad dz = 0, \; d^2z = 0,$$

deshalb werden auch P und Q gleich Null und Gleichung (21.) geht über in

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{R} = \pm \frac{ds^3}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

Den Wert von ϱ, auf den es besonders ankommt, kann man auch für Raumkurven mit Hilfe des Kontingenzwinkels $d\varepsilon$ finden, den zwei unendlich nahe Tangenten miteinander bilden. Es seien wieder α, β, γ die Winkel, welche die Tangente im Kurvenpunkte P mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet. Diese Winkel mögen in $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ übergehen, wenn t in $t + dt$ übergeht. Um den Winkel $d\varepsilon$ zu berechnen, lege man durch den Nullpunkt zwei Gerade OT und OT_1 von der Länge 1, die zu den beiden Tangenten parallel sind und deshalb ebenfalls den Winkel $d\varepsilon$ miteinander bilden (Fig. 154). Gemessen wird dann der Winkel $d\varepsilon$ durch den unendlich kleinen Kreisbogen TT_1, der

Fig. 154.



wieder durch die unendlich kleine Gerade TT_1 ersetzt werden kann. Dabei hat der Punkt T die Koordinaten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, und T_1 hat die Koordinaten

$$(22.)\quad \begin{cases} \cos(\alpha + d\alpha) = \cos\alpha + d(\cos\alpha), \\ \cos(\beta + d\beta) = \cos\beta + d(\cos\beta), \\ \cos(\gamma + d\gamma) = \cos\gamma + d(\cos\gamma). \end{cases}$$

Deshalb wird

$$(23.)\quad \overline{TT_1}^2 = [d(\cos\alpha)]^2 + [d(\cos\beta)]^2 + [d(\cos\gamma)]^2 = d\varepsilon^2.$$

Dabei ist

$$(24.)\quad \begin{cases} d(\cos\alpha) = d\left(\dfrac{dx}{ds}\right) = \dfrac{dsd^2x - dxd^2s}{ds^2}, \\ d(\cos\beta) = d\left(\dfrac{dy}{ds}\right) = \dfrac{dsd^2y - dyd^2s}{ds^2}, \\ d(\cos\gamma) = d\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = \dfrac{dsd^2z - dzd^2s}{ds^2}. \end{cases}$$

Aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

folgt sodann durch Differentiation

$$(25.)\quad dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z,$$

also

$$\begin{aligned} ds(dsd^2x - dxd^2s) &= dx^2d^2x + dy^2d^2x + dz^2d^2x \\ &\quad - dx^2d^2x - dxdyd^2y - dxdzd^2z \\ &= -dy(dxd^2y - dyd^2x) + dz(dzd^2x - dxd^2z), \end{aligned}$$

oder

$$(26.)\quad ds(dsd^2x - dxd^2s) = Qdz - Rdy,$$

und dementsprechend

$$(27.)\quad ds(dsd^2y - dyd^2s) = Rdx - Pdz,$$

$$(28.)\quad ds(dsd^2z - dzd^2s) = Pdy - Qdx.$$

Deshalb geht Gleichung (23.) über in

$$\begin{aligned} ds^6 \,.\, d\varepsilon^2 &= (Qdz - Rdy)^2 + (Rdx - Pdz)^2 + (Pdy - Qdx)^2 \\ &= (P^2 + Q^2 + R^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (Pdx + Qdy + Rdz)^2 \\ &= M^2ds^2, \end{aligned}$$

also

$$(29.)\quad \frac{d\varepsilon}{ds} = \pm\frac{M}{ds^3} = \frac{1}{\varrho}.$$

Man kann diesen Ausdruck noch auf eine etwas andere Form bringen. Aus den Gleichungen (23.) und (24.) folgt nämlich

$$(30.)\quad d\varepsilon^2 . ds^4 = ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] \\ - 2dsd^2s(dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z) \\ + (d^2s)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

oder, da

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \quad dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = dsd^2s$$

ist,

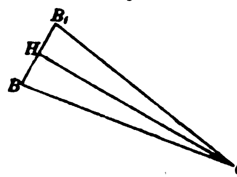
$$(31.)\quad d\varepsilon^2 . ds^4 = ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] \\ - 2ds^2(d^2s)^2 + ds^2(d^2s)^2,$$

oder

$$(32.)\quad \left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^4} = \frac{1}{\varrho^2}.$$

Den Ausdruck $\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\varrho}$ nennt man die *erste* Krümmung, während man unter der *zweiten* Krümmung die Größe $\frac{d\varepsilon'}{ds}$ versteht, wobei der *„Torsionswinkel“* $d\varepsilon'$ der unendlich kleine Winkel ist, den zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen miteinander bilden. Da die Binormale auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, so kann man $d\varepsilon'$ auch als den Winkel erklären, den zwei aufeinander folgende Binormalen miteinander bilden. Nun seien wieder α', β', γ' die Winkel, welche die Binormale im Kurvenpunkte P mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet. Diese Winkel mögen in $\alpha' + d\alpha'$, $\beta' + d\beta'$, $\gamma' + d\gamma'$ übergehen, wenn t in $t + dt$ übergeht. Um den Torsionswinkel $d\varepsilon'$ zu berechnen, legt man jetzt wieder durch den Nullpunkt die beiden Geraden OB und OB_1 von der Länge 1, die zu den beiden Binormalen parallel sind und deshalb ebenfalls den Winkel $d\varepsilon'$ miteinander bilden (Fig. 155). Gemessen wird dann

Fig. 155.



der Winkel $d\varepsilon'$ durch den unendlich kleinen Kreisbogen BB_1, der wieder durch die unendlich kleine Gerade BB_1 ersetzt werden kann. Dabei hat der Punkt B die Koordinaten

$$(33.)\qquad \cos\alpha' = \frac{P}{M},\quad \cos\beta' = \frac{Q}{M},\quad \cos\gamma' = \frac{R}{M},$$

und B_1 hat die Koordinaten

$$(34.)\qquad \begin{cases} \cos(\alpha' + d\alpha') = \cos\alpha' + d(\cos\alpha'), \\ \cos(\beta' + d\beta') = \cos\beta' + d(\cos\beta'), \\ \cos(\gamma' + d\gamma') = \cos\gamma' + d(\cos\gamma'). \end{cases}$$

Deshalb wird

$$(35.)\qquad \overline{BB_1}^2 = [d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2 = d\varepsilon'^2.$$

Dabei ist

$$d(\cos\alpha') = \frac{MdP - PdM}{M^2},\quad d(\cos\beta') = \frac{MdQ - QdM}{M^2},$$
$$d(\cos\gamma') = \frac{MdR - RdM}{M^2},$$

also

$$(36.)\qquad M^4(d\varepsilon')^2$$
$$= (MdP - PdM)^2 + (MdQ - QdM)^2 + (MdR - RdM)^2$$
$$= M^2(dP^2 + dQ^2 + dR^2) + (P^2 + Q^2 + R^2)(dM)^2$$
$$- 2MdM(PdP + QdQ + RdR).$$

Nun ist

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2, \text{ also } MdM = PdP + QdQ + RdR,$$

folglich wird

$$(37.)\qquad M^4(d\varepsilon')^2$$
$$= M^2(dP^2 + dQ^2 + dR^2) - M^2(dM)^2$$
$$= (P^2 + Q^2 + R^2)(dP^2 + dQ^2 + dR^2) - (PdP + QdQ + RdR)^2$$
$$= (QdR - RdQ)^2 + (RdP - PdR)^2 + (PdQ - QdP)^2.$$

Dabei ist

$$P = dyd^2z - dzd^2y,\quad Q = dzd^2x - dxd^2z,\quad R = dxd^2y - dyd^2x,$$
$$dP = dyd^3z - dzd^3y,\quad dQ = dzd^3x - dxd^3z,\quad dR = dxd^3y - dyd^3x,$$

$$(38.)\qquad \begin{cases} QdR - RdQ = dx(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z), \\ RdP - PdR = dy(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z), \\ PdQ - QdP = dz(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z). \end{cases}$$

Deshalb geht Gleichung (37.) über in

$$M^4(d\varepsilon')^2 = ds^2(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z)^2,$$

und man erhält

$$(39.)\qquad \frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Satz. *Die Kurve ist eben, wenn für alle Punkte der Kurve*

$$(40.)\qquad Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 0$$

ist. Denn unter dieser Voraussetzung fallen je zwei aufeinander folgende Schmiegungsebenen zusammen.

Setzt man

$$(41.)\qquad \frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{1}{\varrho'}, \quad \text{also} \quad \varrho' = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z},$$

so heißt ϱ' der Halbmesser der zweiten Krümmung.

§ 150.

Schmiegungskugel.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 252.)

Durch vier aufeinander folgende Punkte P, P_1, P_2, P_3 der Raumkurve kann man eine Kugel legen, welche die *„Schmiegungskugel"* oder *„Oskulationskugel"* genannt wird und die Gleichung

$$(1.)\qquad (x' - \xi')^2 + (y' - \eta')^2 + (z' - \zeta')^2 - r^2 = 0$$

haben möge. Um die vier Größen ξ', η', ζ', r zu ermitteln, beachte man, daß Gleichung (1.) für die Koordinaten der Punkte P, P_1, P_2, P_3 befriedigt werden muß; d. h. es gelten nach den Ausführungen im vorhergehenden Paragraphen die Gleichungen

$$(2.)\qquad F(x, y, z) = (x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + (z - \zeta')^2 - r^2 = 0,$$

$$(3.)\qquad dF(x, y, z) = 2[(x - \xi')dx + (y - \eta')dy + (z - \zeta')dz] = 0,$$

$$(4.)\qquad d^2F(x, y, z) = 2[(x - \xi')d^2x + (y - \eta')d^2y + (z - \zeta')d^2z + ds^2] = 0,$$

$$(5.)\qquad d^3F(x, y, z) = 2[(x - \xi')d^3x + (y - \eta')d^3y + (z - \zeta')d^3z + 3ds d^2s] = 0.$$

Multipliziert man Gleichung (3.) mit $d^2yd^3z - d^2zd^3y$, Gleichung (4.) mit $d^3ydz - d^3zdy$ und Gleichung (5.) mit $dyd^2z - dzd^2y$, so ergibt sich durch Addition dieser drei Gleichungen

$$(6.)\quad (x - \xi')(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z) + (d^3ydz - d^3zdy)ds^2 + 3Pdsd^2s = 0,$$

oder

$$(7.)\quad x - \xi' = \frac{ds^2 \,.\, dP - 3Pdsd^2s}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}.$$

In ähnlicher Weise findet man

$$(8.)\quad y - \eta' = \frac{ds^2 \,.\, dQ - 3Qdsd^2s}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z},$$

$$(9.)\quad z - \zeta' = \frac{ds^2 \,.\, dR - 3Rdsd^2s}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}.$$

Daraus folgt

$$(10.)\quad (Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z)^2r^2 = (ds^2 \,.\, dP - 3Pdsd^2s)^2 + (ds^2 \,.\, dQ - 3Qdsd^2s)^2 + (ds^2 \,.\, dR - 3Rdsd^2s)^2.$$

Diesen Ausdruck kann man noch auf eine etwas einfachere Form bringen. Es war nämlich

$$\cos\alpha' = \frac{P}{M} \quad \text{und} \quad \varrho = \frac{ds^3}{M},$$

folglich ist

$$(11.)\quad \frac{\cos\alpha'}{\varrho} = \frac{P}{ds^3}, \quad d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right) = \frac{ds^2 \,.\, dP - 3Pdsd^2s}{ds^5};$$

deshalb geht Gleichung (10.) über in

$$(12.)\quad r^2 = \frac{ds^{10}\left\{\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\right)\right]^2\right\}}{(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z)^2}.$$

Ferner ist

$$\varrho = \frac{ds^3}{M}, \quad \varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z},$$

also

$$(13.)\quad \varrho^2\varrho' = \frac{ds^6}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z};$$

deshalb kann man Gleichung (12.) auf die Form

$$(12a.) \quad r^2 = \varrho^4 \varrho'^2 \frac{\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\right)\right]^2}{ds^2}$$

bringen. Dabei ist

$$d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right) = \frac{\varrho d(\cos\alpha') - \cos\alpha' . d\varrho}{\varrho^2},$$

folglich wird

$$(14.) \quad \varrho^4 \left\{\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\right)\right]^2\right\}$$
$$= \varrho^2 \{[d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2\}$$
$$- 2\varrho d\varrho [\cos\alpha' d(\cos\alpha') + \cos\beta' d(\cos\beta') + \cos\gamma' d(\cos\gamma')]$$
$$+ d\varrho^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma').$$

Nun ist aber nach Formel Nr. 250 der Tabelle

$$(15.) \quad [d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2 = (d\varepsilon')^2, \quad \frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{1}{\varrho'},$$

und außerdem ist

$$(16.) \quad \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

also

$$\cos\alpha' d(\cos\alpha') + \cos\beta' d(\cos\beta') + \cos\gamma' d(\cos\gamma') = 0,$$

folglich geht Gleichung (14.) über in

$$(17.) \quad \varrho^4 \left\{\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\right)\right]^2\right\}$$
$$= \varrho^2(d\varepsilon')^2 + d\varrho^2 = \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^2 ds^2 + d\varrho^2.$$

Aus den Gleichungen (12a.) und (17.) findet man daher

$$r^2 = \varrho'^2\left[\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2\right],$$

also

$$(18.) \quad r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

§ 151.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll für die gemeine Schraubenlinie mit den Gleichungen

$$(1.) \quad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = c\varphi$$

die Schmiegungsebene, die Hauptnormale, die Binormale, den Krümmungskreis, den Halbmesser der zweiten Krümmung und die Schmiegungskugel bestimmen.

Auflösung. Aus den Gleichungen (1.) folgt

(2.) $dx = -a\sin\varphi d\varphi, \quad dy = a\cos\varphi d\varphi, \quad dz = cd\varphi,$

(3.) $d^2x = -a\cos\varphi d\varphi^2, \quad d^2y = -a\sin\varphi d\varphi^2, \quad d^2z = 0,$

(4.) $d^3x = +a\sin\varphi d\varphi^3, \quad d^3y = -a\cos\varphi d\varphi^3, \quad d^3z = 0;$

folglich wird

(5.) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (a^2 + c^2)d\varphi^2,$$

(6.) $$\begin{cases} P = dyd^2z - dzd^2y = ac\sin\varphi d\varphi^3, \\ Q = dzd^2x - dxd^2z = -ac\cos\varphi d\varphi^3, \\ R = dxd^2y - dyd^2x = a^2d\varphi^3, \end{cases}$$

(7.) $$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = a^2(a^2 + c^2)d\varphi^6,$$

(8.) $$Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = a^2cd\varphi^6,$$

(9.) $$\begin{cases} Qdz - Rdy = -a(a^2 + c^2)\cos\varphi d\varphi^4, \\ Rdx - Pdz = -a(a^2 + c^2)\sin\varphi d\varphi^4, \\ Pdy - Qdx = 0. \end{cases}$$

Die Schmiegungsebene hat daher die Gleichung

$$ac\sin\varphi(x' - x) - ac\cos\varphi(y' - y) + a^2(z' - z) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (1.)

$$cy(x' - x) - cx(y' - y) + a^2(z' - z) = 0,$$

oder

(10.) $$c(yx' - xy') + a^2(z' - z) = 0.$$

Die Hauptnormale hat nach Formel Nr. 244 der Tabelle die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{x} = \frac{y' - y}{y}, \quad z' - z = 0,$$

oder

(11.) $$yx' - xy' = 0, \quad z' - z = 0;$$

dies gibt

Satz 1. *Die Hauptnormale geht stets durch die Achse der Schraubenlinie und ist parallel zur XY-Ebene.*

Dieser Satz wird auch bestätigt durch die Berechnung der Winkel α'', β'', γ'', welche die Hauptnormale mit den

positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, denn es wird nach Formel Nr. 247 der Tabelle

$$(12.)\quad \begin{cases} \cos\alpha'' = \dfrac{Qdz - Rdy}{Mds} = -\dfrac{a(a^2+c^2)\cos\varphi}{a(a^2+c^2)} = -\cos\varphi, \\ \cos\beta'' = \dfrac{Rdx - Pdz}{Mds} = -\dfrac{a(a^2+c^2)\sin\varphi}{a(a^2+c^2)} = -\sin\varphi, \\ \cos\gamma'' = \dfrac{Pdy - Qdx}{Mds} = 0. \end{cases}$$

Die Binormale hat nach Formel Nr. 245 der Tabelle die Gleichung

$$\frac{x'-x}{ac\sin\varphi} = \frac{y'-y}{-ac\cos\varphi} = \frac{z'-z}{a^2},$$

oder

$$(13.)\quad \frac{x'-x}{cy} = -\frac{y'-y}{cx} = \frac{z'-z}{a^2}.$$

Die Winkel α', β', γ', die sie mit den Koordinaten-Achsen bildet, werden bestimmt durch die Gleichungen

$$(14.)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{P}{M} = \dfrac{cy}{a\sqrt{a^2+c^2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{Q}{M} = -\dfrac{cx}{a\sqrt{a^2+c^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{R}{M} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}. \end{cases}$$

Der Winkel γ' ist also konstant; dies gibt

Satz 2. *Die Neigung der Binormale gegen die Z-Achse und deshalb auch gegen die XY-Ebene ist konstant.*

Ferner ist

$$(15.)\quad \varrho = \pm\frac{ds^3}{M} = \pm\frac{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}}{a\sqrt{a^2+c^2}} = \pm\frac{a^2+c^2}{a}.$$

Daraus folgt

Satz 3. *Der Halbmesser der ersten Krümmung ist konstant.*

Daraus folgt weiter

$$(16.)\quad \frac{d\varrho}{d\varphi} = 0 \quad \text{und deshalb auch} \quad \frac{d\varrho}{ds} = 0.$$

Satz 4. *Auch der Halbmesser der zweiten Krümmung ist konstant,* denn es wird nach Formel Nr. 250 der Tabelle

$$(17.)\quad \varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z} = \frac{a^2(a^2 + c^2)}{a^2c} = \frac{a^2 + c^2}{c}.$$

Endlich ist nach Formel Nr. 252 der Tabelle

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \varrho^2,$$

also

$$(18.)\quad r = \varrho = \frac{a^2 + c^2}{a}.$$

Dies gibt

Satz 5. *Die Schmiegungskugel hat denselben Halbmesser und deshalb auch denselben Mittelpunkt wie der Krümmungskreis.*

Schließlich wird nach Formel Nr. 248 der Tabelle

$$\xi' = \xi = x + \frac{(Qdz - Rdy)ds^2}{M^2} = a\cos\varphi - \frac{(a^2 + c^2)^2 a\cos\varphi}{a^2(a^2 + c^2)},$$

$$\eta' = \eta = y + \frac{(Rdx - Pdz)ds^2}{M^2} = a\sin\varphi - \frac{(a^2 + c^2)^2 a\sin\varphi}{a^2(a^2 + c^2)},$$

$$\zeta' = \zeta = z + \frac{(Pdy - Qdx)ds^2}{M^2} = c\varphi,$$

oder

$$(19.)\quad \xi' = \xi = -\frac{c^2}{a}\cos\varphi,\quad \eta' = \eta = -\frac{c^2}{a}\sin\varphi,\quad \zeta' = \zeta = c\varphi.$$

Man erhält also

Satz 6. *Der Mittelpunkt der Schmiegungskugel, der mit dem Mittelpunkt des Krümmungskreises zusammenfällt, beschreibt wieder eine Schraubenlinie, die aus der ursprünglichen entsteht, indem man a mit* $-\frac{c^2}{a}$ *vertauscht.*

Aufgabe 2. Man soll für die Raumkurve dritten Grades mit den Gleichungen

$$(20.)\quad x = t,\quad y = \frac{t^2}{2},\quad z = \frac{t^3}{3}$$

die beiden Krümmungshalbmesser, den Halbmesser der Schmiegungskugel und die Krümmungsmittelpunktskurve ermitteln.

Auflösung. Hier ist

$$(21.)\qquad dx = dt, \quad dy = tdt, \quad dz = t^2dt,$$

$$(22.)\qquad d^2x = 0, \quad d^2y = dt^2, \quad d^2z = 2tdt^2,$$

$$(23.)\qquad d^3x = 0, \quad d^3y = 0, \quad d^3z = 2dt^3,$$

folglich wird

$$(24.)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (t^4 + t^2 + 1)dt^2,$$

$$(25.)\qquad P = t^2dt^3, \quad Q = -2tdt^3, \quad R = dt^3,$$

$$(26.)\qquad M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = (t^4 + 4t^2 + 1)dt^6,$$

$$(27.)\qquad Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 2dt^6,$$

$$(28.)\qquad \begin{cases} Qdz - Rdy = (-2t^3 - t)dt^4, \\ Rdx - Pdz = (-t^4 + 1)dt^4, \\ Pdy - Qdx = (t^3 + 2t)dt^4. \end{cases}$$

Dies gibt

$$(29.)\qquad \varrho^2 = \frac{ds^6}{M^2} = \frac{(t^4+t^2+1)^3}{t^4+4t^2+1}, \quad \varrho = \pm\frac{(t^4+t^2+1)\sqrt{t^4+t^2+1}}{\sqrt{t^4+4t^2+1}},$$

$$(30.)\qquad \varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z} = \frac{1}{2}(t^4 + 4t^2 + 1),$$

$$2\varrho\frac{d\varrho}{dt} = \frac{2(t^4 + t^2 + 1)^2t(4t^6 + 21t^4 + 12t^2 - 1)}{(t^4 + 4t^2 + 1)^2},$$

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = \frac{(t^4 + t^2 + 1)t^2(4t^6 + 21t^4 + 12t^2 - 1)^2}{(t^4 + 4t^2 + 1)^3},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{(t^4 + t^2 + 1)^3}{t^4 + 4t^2 + 1}$$

$$+ \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^2t^2(4t^6 + 21t^4 + 12t^2 - 1)^2}{4(t^4 + 4t^2 + 1)^3},$$

oder

$$(31.)\qquad r^2 = \frac{4(t^4 + t^2 + 1)^3 + t^2(4t^6 + 21t^4 + 12t^2 - 1)^2}{4(t^4 + 4t^2 + 1)}.$$

Schließlich wird

$$x - \xi = -\frac{(Qdz - Rdy)ds^2}{M^2} = \frac{(2t^3 + t)(t^4 + t^2 + 1)}{t^4 + 4t^2 + 1},$$

$$y - \eta = -\frac{(Rdx - Pdz)ds^2}{M^2} = \frac{(t^4 - 1)(t^4 + t^2 + 1)}{t^4 + 4t^2 + 1},$$

$$z - \zeta = -\frac{(Pdy - Qdx)ds^2}{M^2} = \frac{-(t^3 + 2t)(t^4 + t^2 + 1)}{t^4 + 4t^2 + 1},$$

folglich wird

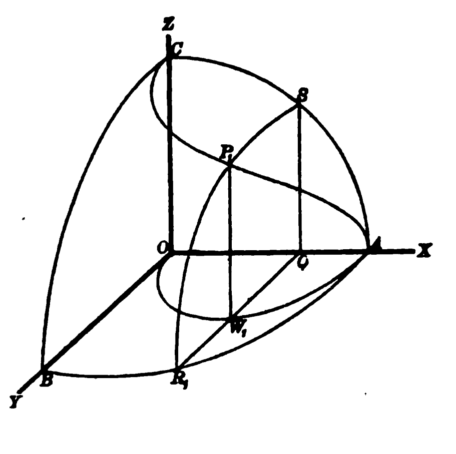
$$(32.)\quad \xi = \frac{-2t^7 - 2t^5 + t^3}{t^4 + 4t^2 + 1}, \quad \eta = \frac{-2t^8 - t^6 + 4t^4 + 3t^2 + 2}{2(t^4 + 4t^2 + 1)},$$
$$\zeta = \frac{4t^7 + 13t^5 + 10t^3 + 6t}{3(t^4 + 4t^2 + 1)}.$$

Aufgabe 3. Man soll von der *sphärischen Lemniskate* mit den Gleichungen

$$(33.)\quad x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - ax = 0$$

die Schmiegungsebene, die beiden Krümmungshalbmesser und den Halbmesser der Schmiegungskugel ermitteln.

Fig. 156.



Auflösung. Setzt man hier wieder wie in § 147

$$(34.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(1 + \cos\varphi), \\ y = \dfrac{a}{2}\sin\varphi, \\ z = a\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right), \end{cases}$$

so findet man, wenn man $\varphi = 2t$ setzt,

$$(34\text{a.})\quad x = \frac{a}{2}[1 + \cos(2t)] = a\cos^2 t, \quad y = \frac{a}{2}\sin(2t), \quad z = a\sin t,$$

$$(35.)\quad dx = -a\sin(2t)dt, \quad dy = a\cos(2t)dt, \quad dz = a\cos t dt,$$
$$(36.)\quad d^2x = -2a\cos(2t)dt^2, \; d^2y = -2a\sin(2t)dt^2, \; d^2z = -a\sin t dt^2,$$
$$(37.)\quad d^3x = +4a\sin(2t)dt^3, \; d^3y = -4a\cos(2t)dt^3, \; d^3z = -a\cos t dt^3,$$

folglich wird

$$(38.)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2(1 + \cos^2 t)dt^2,$$

$$(39.)\quad \begin{cases} P = a^3[-\cos(2t)\sin t + 2\sin(2t)\cos t]dt^3 \\ \qquad\qquad = a^3\sin t(1 + 2\cos^2 t)dt^3, \\ Q = a^3[-2\cos(2t)\cos t - \sin(2t)\sin t]dt^3 = -2a^3\cos^3 t dt^3, \\ R = 2a^3[\sin^2(2t) + \cos^2(2t)]dt^3 = 2a^3 dt^3, \end{cases}$$

(40.) $$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 = a^4(5 + 3\cos^2 t)dt^6,$$

(41.) $$Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 6a^3 \cos t dt^6.$$

Dies gibt für die Gleichung der Schmiegungsebene

(42.) $$(x' - x)\sin t(1 + 2\cos^2 t) - 2(y' - y)\cos^3 t + 2(z' - z) = 0.$$

Aus den Gleichungen (34.) und (34a.) folgt aber

(43.) $$\cos^2 t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{z}{a}, \quad \cos t = \frac{y}{z},$$

(44.) $$y^2 = ax - x^2 = (a - x)x, \quad z^2 = a^2 - x^2 - y^2 = a(a - x),$$

folglich geht Gleichung (42.) über in

(45.) $$(x' - x)z^2(a + 2x) - 2(y' - y)axy + 2a^2z(z' - z) = 0.$$

Dabei ist aber

$$-xz^2(a + 2x) + 2axy^2 - 2a^2z^2 = a^2(x - a)(x + 2a),$$

folglich hat die Schmiegungsebene die Gleichung

(46.) $$(x - a)(2x + a)x' + 2xyy' - 2azz' - a(x - a)(x + 2a) = 0.$$

Ferner ist

(47.) $$\varrho^2 = \frac{ds^6}{M^2} = \frac{a^2(1 + \cos^2 t)^3}{5 + 3\cos^2 t} = \frac{(a + x)^3}{5a + 3x},$$

also

(48.) $$\varrho = \pm \frac{(a + x)\sqrt{a + x}}{\sqrt{5a + 3x}},$$

(49.) $$\varrho \frac{d\varrho}{dt} = -\frac{6a^2 \sin t \cos t(1 + \cos^2 t)^2(2 + \cos^2 t)}{(5 + 3\cos^2 t)^2},$$

(50.) $$\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{36 \sin^2 t \cos^2 t(2 + \cos^2 t)^2}{(5 + 3\cos^2 t)^3},$$

(51.) $$\varrho' = \frac{M^2}{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z} = \frac{a(5 + 3\cos^2 t)}{6\cos t} = \frac{(5a + 3x)z}{6y},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2 = \frac{a^2(1 + \cos^2 t)^3}{5 + 3\cos^2 t} + \frac{a^2 \sin^2 t(2 + \cos^2 t)^2}{5 + 3\cos^2 t},$$

oder

(52.) $$r = a.$$

Dieses Resultat war zu erwarten, denn nach den Gleichungen (33.) geht ja die Kugel mit dem Halbmesser a durch alle Punkte der Kurve hindurch.

§ 152.

Tangenten, Tangentialebenen und Normalen an eine beliebige krumme Fläche.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 253 bis 255.)

Erklärung. *Eine gerade Linie heißt eine Tangente der Fläche*

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{oder} \quad z = f(x, y), \tag{1.}$$

im Flächenpunkte P, wenn sie durch diesen Punkt hindurchgeht, und ein zweiter Schnittpunkt der Geraden mit der Fläche dem Punkte P unendlich nahe rückt.

Aufgabe 1. Man soll die Bedingungen finden, unter denen die Gerade

$$x' = mz' + \mu, \quad y' = nz' + \nu \tag{2.}$$

eine Tangente der Fläche

$$z = f(x, y)$$

im Flächenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z ist.

Auflösung. Die laufenden Koordinaten der geraden Linie sind mit x', y', z' bezeichnet worden, weil x, y, z die Koordinaten des Berührungspunktes P sind. Damit nun die Gerade durch diesen Berührungspunkt P hindurchgeht, müssen die Gleichungen

$$x = mz + \mu, \quad y = nz + \nu \tag{3.}$$

gelten. Daraus folgt

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z). \tag{4.}$$

Irgendein Flächenpunkt P', welcher dem Punkte P benachbart ist, hat die Koordinaten

$$x' = x + \Delta x, \quad y' = y + \Delta y, \quad z' = z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y), \tag{5.}$$

wobei noch Δx und Δy ganz beliebig und *voneinander unabhängig* sind. Damit nun die Gerade auch durch diesen Punkt P' hindurchgeht, müssen die Gleichungen

$$\Delta x = m\Delta z \quad \text{und} \quad \Delta y = n\Delta z \tag{6.}$$

befriedigt werden.

Läßt man jetzt Δx und Δy unendlich klein werden, indem man sie bezw. durch dx und dy ersetzt, so rückt der Punkt P' dem Punkte P unendlich nahe. Dann wird auch Δz unendlich klein, und zwar geht Δz über in



$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{7.}$$

Dadurch nehmen die Gleichungen (6.) die Form an

$$dx = m\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right), \quad dy = n\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right).$$

Dies gibt

$$\left(m\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right)dx + m\frac{\partial z}{\partial y} dy = 0, \tag{8.}$$

$$n\frac{\partial z}{\partial x} dx + \left(n\frac{\partial z}{\partial y} - 1\right)dy = 0. \tag{9.}$$

Multipliziert man Gleichung (8.) mit $n\frac{\partial z}{\partial x}$, Gleichung (9.) mit $1 - m\frac{\partial z}{\partial x}$, so erhält man durch Addition und Fortlassung des Faktors dy

$$m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0. \tag{10.}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Gerade

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z)$$

eine Tangente der Fläche im Punkte P.

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben ist, so erhält man nach Formel Nr. 237 der Tabelle

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1}{F_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2}{F_3}. \tag{11.}$$

Deshalb geht Gleichung (10.) über in

$$F_1 m + F_2 n + F_3 = 0. \tag{12.}$$

Aufgabe 2. Die Gleichung einer krummen Fläche sei wieder

$$F(x, y, z) = 0, \quad \text{oder} \quad z = f(x, y); \tag{13.}$$

man soll den geometrischen Ort aller Tangenten im Flächenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z bestimmen.

Auflösung. Da in Aufgabe 1 die Größen dx und dy voneinander *unabhängig* sind, so gibt es unendlich viele

Tangenten der Fläche im Punkte P. Davon kann man sich auch dadurch überzeugen, daß man in den Gleichungen (10.) und (12.) den Wert von m noch beliebig annehmen und dann den Wert von n aus dieser Gleichung berechnen kann. Es wird nämlich

$$(14.)\qquad n = \frac{1 - m\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{F_1 m + F_3}{F_2}.$$

Setzt man diesen Wert von n in die Gleichungen (4.) ein, so erhält man

$$(15.)\quad x' - x = m(z' - z),\quad \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y) = \left(1 - m\frac{\partial z}{\partial x}\right)(z' - z),$$

oder

$$(15a.)\quad x' - x = m(z' - z),\quad F_2(y' - y) = -(F_1 m + F_3)(z' - z).$$

Diese Gleichungen stellen also eine Tangente im Flächenpunkte P dar, welchen Wert auch m haben mag. Eliminiert man jetzt aus diesen beiden Gleichungen m, so erhält man

$$(16.)\qquad z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y),$$

oder

$$(16a.)\qquad F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0.$$

Dies sind zwei verschiedene Formen für die Gleichung einer *Ebene*, in welcher alle Tangenten liegen, die im Punkte P an die Fläche möglich sind. Man nennt diese Ebene daher die *„Tangentialebene oder Berührungsebene der Fläche im Punkte P“*.

Die Gleichung der Tangentialebene wird illusorisch, wenn

$$(17.)\qquad F_1 = 0,\quad F_2 = 0,\quad F_3 = 0.$$

In diesem Falle, welcher allerdings *nur ausnahmsweise* eintreten kann, liegen die Tangenten des Flächenpunktes P *nicht* mehr sämtlich in derselben Ebene.

So hat z. B. die Spitze des Kegels mit der Gleichung

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{18.}$$

die Koordinaten

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0; \tag{19.}$$

für diese Werte von x, y, z wird aber auch

$$F_1 = \frac{2x}{a^2} = 0, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2} = 0, \quad F_3 = -\frac{2z}{c^2} = 0. \tag{20.}$$

Man nennt einen Punkt der Fläche, für welchen die Gleichungen (17.) gelten, „einen *Knotenpunkt*".

Die Gerade, welche auf der Tangentialebene im Berührungspunkte P senkrecht steht, heißt „*Normale*" der Fläche, ihre Gleichungen sind, wie aus Gleichung (16.) und (16a.) unmittelbar hervorgeht,

$$x' - x + \frac{\partial z}{\partial x}(z' - z) = 0, \quad y' - y + \frac{\partial z}{\partial y}(z' - z) = 0, \tag{21.}$$

oder

$$\frac{x' - x}{F_1} = \frac{y' - y}{F_2} = \frac{z' - z}{F_3}. \tag{22.}$$

§ 153.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein *Ellipsoid* ist durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1.}$$

gegeben; man soll im Flächenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z die Tangentialebene und die Normale bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

also

$$F_1 = \frac{2x}{a^2}, \quad F_2 = \frac{2y}{b^2}, \quad F_3 = \frac{2z}{c^2}; \tag{2.}$$

deshalb wird nach Formel Nr. 254 der Tabelle die Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{x(x' - x)}{a^2} + \frac{y(y - y)}{b^2} + \frac{z(z' - z)}{c^2} = 0, \tag{3.}$$

oder, wenn man die Gleichungen (1.) und (3.) addiert,

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = 0. \tag{4.}$$

Die Gleichungen der Normalen sind nach Formel Nr. 255 der Tabelle

$$\frac{a^2(x' - x)}{x} = \frac{b^2(y' - y)}{y} = \frac{c^2(z' - z)}{z}. \tag{5.}$$

Aufgabe 2. Ein *elliptisches Paraboloid* ist durch die Gleichung

$$x^2 + a^2y^2 - 2pz = 0 \tag{6.}$$

gegeben; man soll im Flächenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z die Tangentialebene und die Normale bestimmen.

Auflösung. Hier ist

$$F(x, y, z) = x^2 + a^2y^2 - 2pz,$$

also

$$F_1 = 2x, \quad F_2 = 2a^2y, \quad F_3 = -2p, \tag{7.}$$

deshalb wird nach Formel Nr. 254 der Tabelle die Gleichung der Tangentialebene

$$x(x' - x) + a^2y(y' - y) - p(z' - z) = 0, \tag{8.}$$

oder, wenn man die Gleichungen (6.) und (8.) addiert,

$$xx' + a^2yy' - p(z' + z) = 0. \tag{9.}$$

Ist z. B.

$$x = 3a, \; y = 4, \quad \text{also} \quad 2pz = 9a^2 + 16a^2 = 25a^2,$$

so geht Gleichung (9.) über in

$$6ax' + 8a^2y' = 2pz' + 25a^2. \tag{9a.}$$

Die Gleichungen der Normalen sind nach Formel Nr. 255 der Tabelle

$$\frac{x' - x}{x} = \frac{y' - y}{a^2y} = -\frac{z' - z}{p}. \tag{10.}$$

§ 154.

Krümmung der Flächen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 256 bis 262.)

Ist eine Fläche durch die Gleichung

(1.) $$z = f(x, y)$$

gegeben, so möge der Kürze wegen

(2.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

gesetzt werden. Da durch jeden Punkt P der Fläche unendlich viele Kurven gehen, so kann man sich die Aufgabe stellen, die Krümmung aller dieser Kurven im Punkte P zu ermitteln. Dabei liegt aber der Krümmungskreis in der Schmiegungsebene; deshalb haben alle Kurven, die auf der Fläche liegen, durch den Flächenpunkt P gehen und dieselbe Schmiegungsebene in diesem Punkte haben, dieselbe Krümmung. Es genügt daher, die Krümmung aller *ebenen* Kurven zu untersuchen, welche aus der Fläche von einer durch den Punkt P gelegten Ebene ausgeschnitten werden. Eine solche ebene Schnittkurve möge der Kürze wegen in dem folgenden *„Schnitt"* genannt werden.

Die Gleichungen des Schnittes seien

(3.) $$z' = f(x', y'), \quad A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0,$$

wobei x, y, z die Koordinaten des betrachteten Flächenpunktes P bedeuten, während x', y', z' die laufenden Koordinaten des Schnittes sind.

Dann wird nach Formel Nr. 248 der Tabelle

(4.) $$\varrho^2 = \frac{ds^6}{M^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3}{P^2 + Q^2 + R^2},$$

wobei

(5.) $$P = dyd^2z - dzd^2y, \quad Q = dzd^2x - dxd^2z, \quad R = dxd^2y - dyd^2x$$

war. Da die Ebene des Schnittes durch drei unendlich nahe Punkte der Kurve hindurchgeht, gelten die Gleichungen

(6.) $$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

(7.) $$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0.$$

Daraus folgt

$$P : A = Q : B = R : C. \tag{8.}$$

Dabei ergibt sich aus Gleichung (1.)

$$dz = pdx + qdy, \tag{9.}$$

$$d^2z = dpdx + dqdy + pd^2x + qd^2y, \tag{10.}$$

also

$$dzd^2z = d^2z(pdx + qdy) = dz(dpdx + dqdy + pd^2x + qd^2y),$$

folglich wird

$$dz(dpdx + dqdy) = q(dyd^2z - dzd^2y) - p(dzd^2x - dxd^2z),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.) und (8.)

$$dz(dpdx + dqdy) = Pq - Qp = P\frac{Aq - Bp}{A};$$

deshalb erhält man

$$\left\{\begin{array}{l} P = \dfrac{Adz(dpdx + dqdy)}{Aq - Bp}, \\ Q = \dfrac{Bdz(dpdx + dqdy)}{Aq - Bp}, \\ R = \dfrac{Cdz(dpdx + dqdy)}{Aq - Bp}. \end{array}\right. \tag{11.}$$

Dabei ist noch

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

also

$$dpdx + dqdy = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2; \tag{12.}$$

dies gibt

$$\varrho^2 = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3(Aq - Bp)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2)^2dz^2}. \tag{13.}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen

$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \quad \text{und} \quad dz = pdx + qdy$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{B + Cq}{Aq - Bp}, \quad \frac{dy}{dz} = +\frac{A + Cp}{Aq - Bp}. \tag{14.}$$

Deshalb geht Gleichung (13.) über in

$$\varrho^2 = \frac{[(B + Cq)^2 + (A + Cp)^2 + (Aq - Bp)^2]^3}{(A^2 + B^2 + C^2)[r(B + Cq)^2 - 2s(A + Cp)(B + Cq) + t(A + Cp)^2]^2}. \tag{15.}$$

Unter den unendlich vielen Ebenen, welche durch den Punkt P hindurchgehen, mögen besonders diejenigen betrachtet werden, welche durch die Normale gehen. Die von einer solchen Ebene ausgeschnittene Kurve nennt man „*Normalschnitt*". Die Gleichungen der Normale waren nach Formel Nr. 255 der Tabelle

$$x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0, \tag{16.}$$

oder

$$\frac{x' - x}{F_1} = \frac{y' - y}{F_2} = \frac{z' - z}{F_3}.$$

Damit die Ebene ε durch diese Gerade hindurchgeht, muß

$$Ap(z' - z) + Bq(z' - z) - C(z' - z) = 0$$

sein; dies gibt

$$Ap + Bq - C = 0. \tag{17.}$$

Da es unendlich viele Normalschnitte gibt, so kann man eine veränderliche Größe, z. B.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda, \tag{18.}$$

die man einen „*variablen Parameter*" nennt, einführen. Zu jedem Werte von λ gehört dann ein Normalschnitt. Dabei ist nach den Gleichungen (6.) und (17.)

$$A + B\lambda + C(p + q\lambda) = 0 \quad \text{und} \quad Ap + Bq - C = 0,$$

also

$$\frac{A}{C} = -\frac{pq + (1 + q^2)\lambda}{q - p\lambda}, \quad \frac{B}{C} = \frac{1 + p^2 + pq\lambda}{q - p\lambda}, \tag{19.}$$

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{C^2} = \frac{(1 + p^2 + q^2)[1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2]}{(q - p\lambda)^2}, \tag{20.}$$

$$\frac{Aq - Bp}{C} = -\frac{(1 + p^2 + q^2)(p + q\lambda)}{q - p\lambda}, \tag{21.}$$

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2 \\ &= dx^2[1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2], \end{aligned} \tag{22.}$$

folglich geht Gleichung (13.) über in

$$\varrho^2 = \frac{[1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2]^2(1 + p^2 + q^2)}{(r + 2s\lambda + t\lambda^2)^2}. \tag{23.}$$

Dies gibt

$$(24.)\quad \varrho = \pm \frac{[1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2]\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + 2s\lambda + t\lambda^2}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ ist also eine Funktion von λ; man kann daher die Werte von λ aufsuchen, für welche ϱ ein Maximum oder ein Minimum wird. Zu diesem Zwecke setze man

$$\frac{d\varrho}{d\lambda} = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{(r + 2s\lambda + t\lambda^2)^2}\{(r + 2s\lambda + t\lambda^2)[2pq + 2(1 + q^2)\lambda] \\ - [1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2](2s + 2t\lambda)\}$$

gleich Null; dies gibt

$$(25.)\quad (r + 2s\lambda + t\lambda^2)[pq + (1 + q^2)\lambda] \\ = [1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2](s + t\lambda),$$

oder wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung

$$(s\lambda + t\lambda^2)[pq + (1 + q^2)\lambda] = [pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2](s + t\lambda)$$

fortläßt,

$$(25\text{a.})\quad (r + s\lambda)[pq + (1 + q^2)\lambda] = (1 + p^2 + pq\lambda)(s + t\lambda).$$

Daraus folgt

$$(26.)\quad \frac{1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2}{r + 2s\lambda + t\lambda^2} = \frac{pq + (1 + q^2)\lambda}{s + t\lambda} = \frac{1 + p^2 + pq\lambda}{r + s\lambda},$$

$$(25\text{b.})\quad [pqt - (1 + q^2)s]\lambda^2 + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]\lambda \\ + [(1 + p^2)s - pqr] = 0.$$

Nennt man die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung λ_1 und λ_2, so wird

$$(27.)\quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{(1 + p^2)t - (1 + q^2)r}{pqt - (1 + q^2)s}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{(1 + p^2)s - pqr}{pqt - (1 + q^2)s}.$$

Da ein wirkliches Maximum und ein wirkliches Minimum vorhanden ist, so sind die Werte von λ_1 und λ_2 reell. Für diese Werte von λ wird nach den Gleichungen (24.) und (26.), wenn man das obere Vorzeichen nimmt,

$$(28.)\quad \varrho = \frac{[pq + (1 + q^2)\lambda]\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{s + t\lambda} \\ = \frac{(1 + p^2 + pq\lambda)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + s\lambda}.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\sqrt{1+p^2+q^2}$ mit W, so findet man aus der Doppelgleichung (28.)

$$s\varrho + t\varrho\lambda = pqW + (1+q^2)\lambda W,$$
$$r\varrho + s\varrho\lambda = (1+p^2)W + pq\lambda W,$$

oder

$$(29.)\quad \begin{cases} [t\varrho - (1+q^2)W]\lambda + s\varrho - pqW = 0, \\ [s\varrho - pqW]\lambda + r\varrho - (1+p^2)W = 0. \end{cases}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen λ, so erhält man

$$(s\varrho - pqW)(s\varrho - pqW) - [r\varrho - (1+p^2)W] \cdot [t\varrho - (1+q^2)W] = 0$$

oder

$$(30.)\quad (s^2 - rt)\varrho^2 + [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\varrho\sqrt{1+p^2+q^2} - (1+p^2+q^2)^2 = 0,$$

deren Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 den Gleichungen

$$(31.)\quad \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}}{s^2 - rt},$$

$$(32.)\quad \varrho_1\varrho_2 = -\frac{(1+p^2+q^2)^2}{s^2 - rt}$$

genügen. Dabei entsprechen ϱ_1 und ϱ_2 dem Maximum bezw. dem Minimum von ϱ. Die zugehörigen Normalschnitte nennt man „*Hauptnormalschnitte*"; ϱ_1 und ϱ_2 selbst nennt man die „*Hauptkrümmmungshalbmesser*".

Ist $s^2 - rt < 0$, so haben ϱ_1 und ϱ_2 *gleiches* Zeichen, d. h. sie liegen in derselben Richtung der Normalen. Dies tritt z. B. beim Ellipsoid ein. Ist aber $s^2 - rt > 0$, so haben ϱ_1 und ϱ_2 *entgegengesetztes* Zeichen, d. h. die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte liegen auf entgegengesetzten Seiten der Fläche, ein Fall, der z. B. beim einschaligen Hyperboloid eintritt. Wird $s^2 - rt = 0$, so wird einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß.

Macht man den betrachteten Flächenpunkt P Anfangspunkt der Koordinaten, die Tangentialebene

$$(33.)\quad z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

zur XY-Ebene und die Normale

(34.) $x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0$

zur Z-Achse, so wird

(35.) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0;$

deshalb gehen die Gleichungen (33.) und (34.) über in

(33a.) $$z' = 0.$$

(34a.) $$x' = 0, \quad y' = 0.$$

Die Ebene eines Normalschnittes hat dann die Gleichung

(36.) $$y' = \lambda x',$$

und die Gleichungen der beiden Hauptnormalschnitte sind

(37.) $$y' = \lambda_1 x', \qquad y' = \lambda_2 x',$$

wobei nach Gleichung (27.)

(38.) $$\lambda_1 \lambda_2 = -1$$

wird. Dies gibt

Satz 1. *Die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte stehen aufeinander senkrecht.*

Der Einfachheit wegen kann man jetzt noch die Ebenen der beiden Hauptnormalschnitte zur XZ-Ebene und zur YZ-Ebene machen; dann wird nach Gleichung (27.)

(39.) $$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \infty, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{t - r}{s} = \infty,$$

also

(40.) $$s = 0.$$

Dadurch geht Gleichung (30.) über in

(41.) $$rt\varrho^2 - (r + t)\varrho + 1 = 0;$$

dies gibt

(42.) $$\varrho_1 = \frac{1}{r}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{t}.$$

Ist α der Winkel, den ein Normalschnitt mit dem ersten Hauptnormalschnitte bildet, so hat seine Ebene die Gleichung

$$y' = \lambda x', \quad \text{wobei} \quad \lambda = \operatorname{tg}\alpha$$

ist. Man findet dann aus Gleichung (24.) für das obere Vorzeichen

$$\varrho = \frac{1+\lambda^2}{r+t\lambda^2} = \frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\varrho_2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}},$$

oder

$$(43.)\qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}. \qquad (\textit{Euler}\text{sche Formel.})$$

Ist $s^2 - rt < 0$, so haben, wie schon oben gezeigt wurde, ϱ_1 und ϱ_2 gleiches Zeichen; deshalb folgt aus Gleichung (43.), daß auch ϱ stets dasselbe Zeichen hat. Ist dagegen $s^2 - rt > 0$, so haben ϱ_1 und ϱ_2 ungleiches Zeichen, dann kann man den Winkel α so bestimmen, daß

$$(44.)\qquad \mathrm{tg}^2\alpha = -\frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2} = 0$$

wird, wobei man noch α mit $-\alpha$ vertauschen darf. Daraus folgt

Satz 2. *Haben ϱ_1 und ϱ_2 verschiedene Zeichen, so gibt es zwei Normalschnitte, deren Krümmungshalbmesser unendlich groß werden. Die Winkel, welche ihre Ebenen miteinander bilden, werden durch die Ebenen der Hauptnormalschnitte halbiert.*

Sind ϱ und ϱ' die Krümmungshalbmesser zweier Normalschnitte, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ist also $\alpha' = \alpha + 90^0$, so wird

$$\cos\alpha' = -\sin\alpha, \quad \sin\alpha' = \cos\alpha$$

und

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2},$$

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\cos^2\alpha'}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha'}{\varrho_2} = \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_2},$$

folglich ist

$$(45.)\qquad \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2};$$

dies gibt

Satz 3. *Die Summe der Krümmungen je zweier Normalschnitte, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, ist konstant.*

Ist der Schnitt ein schiefer, so kann man durch die Schnittlinie g der Tangentialebene und der schneidenden Ebene ε eine Normalebene legen, welche wieder den Winkel α mit der Ebene des ersten Hauptnormalschnittes bilden möge, während der Winkel, den sie mit der Ebene ε bildet, ϑ heißen soll. Die Gerade g hat dann die Gleichungen

(46.) $$z' = 0, \quad y' = \operatorname{tg}\alpha \,.\, x'.$$

Damit die Ebene ε mit der Gleichung

(47.) $$Ax' + By' + Cz' = 0$$

durch die Gerade g hindurchgeht, muß also

$$Ax' + B\operatorname{tg}\alpha \,.\, x' = 0, \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$$

sein; deshalb setze man

(48.) $$A = \sin\alpha, \quad B = -\cos\alpha.$$

Die Ebene ε des schiefen Schnittes hat daher die Gleichung

(49.) $$x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + Cz' = 0,$$

und der durch g gelegte Normalschnitt hat die Gleichung

(50.) $$x'\sin\alpha - y'\cos\alpha = 0,$$

folglich wird

(51.) $$\cos\vartheta = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + C^2}\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2}} \text{*)};$$

dies gibt

(52.) $$1 + C^2 = \frac{1}{\cos^2\vartheta} = 1 + \operatorname{tg}^2\vartheta, \quad \text{also} \quad C = \pm \operatorname{tg}\vartheta.$$

Die Gleichung des schiefen Schnittes ist also, wenn man das obere Zeichen wählt,

(53.) $$x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + z'\operatorname{tg}\vartheta = 0.$$

---

*) Den Neigungswinkel ϑ zweier Ebenen ε und ε_1 mit den Gleichungen

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \quad \text{und} \quad A_1x' + B_1y' + C_1z' + D_1 = 0$$

findet man bekanntlich aus der Formel

$$\cos\vartheta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes mit ϱ', den des zugehörigen Normalschnittes mit ϱ, so findet man daher aus Gleichung (15.)

$$\varrho'^2 = \frac{(B^2+A^2)^3}{(A^2+B^2+C^2)(B^2r+A^2t)^2} = \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2\vartheta)(r\cos^2\alpha+t\sin^2\alpha)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\vartheta}{\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1}+\frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}\right)^2},$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (43.)

$$\varrho' = \varrho\cos\vartheta. \qquad (54.)$$

(Satz von *Meunier.*)

Legt man durch die Normale des Flächenpunktes P sämtliche Normalschnitte, so bilden die zugehörigen Krümmungskreise eine Fläche vierten Grades, deren Untersuchung hier aber übergangen werden möge.

§ 155.

Krümmungsmittelpunktsflächen.

Zu den im vorigen Paragraphen entwickelten Sätzen gelangt man auch, indem man zu der Normale im Flächenpunkte P diejenigen Normalen aufsucht, welche der ersten Normale unendlich nahe liegen und dieselbe schneiden. Die Gleichungen der Normalen im Punkte P sind

$$x'-x+p(z'-z)=0, \quad y'-y+q(z'-z)=0. \qquad (1.)$$

Für eine unendlich nahe Normale gelten daher die Gleichungen

$$\begin{cases} x'-x-dx+(p+dp)(z'-z-dz)=0, \\ y'-y-dy+(q+dq)(z'-z-dz)=0. \end{cases} \qquad (2.)$$

Wenn sich die beiden Normalen in einem Punkte P' schneiden, so gelten für die Koordinaten dieses Punktes alle vier Gleichungen (1.) und (2.); deshalb gelten auch die Gleichungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} -dx - pdz + (z' - z)dp = 0, \\ -dy - qdz + (z' - z)dq = 0^{*}), \end{cases}$$

folglich wird

$$(4.)\qquad z' - z = \frac{dx + pdz}{dp} = \frac{dy + qdz}{dq},$$

oder, wenn man für dz, dp, dq ihre Werte

$$dz = pdx + qdy,\quad dp = rdx + sdy,\quad dq = sdx + tdy$$

einsetzt,

$$(5.)\qquad z' - z = \frac{(1 + p^2)dx + pqdy}{rdx + sdy} = \frac{pqdx + (1 + q^2)dy}{sdx + tdy}.$$

Dies gibt, wenn man wieder $\dfrac{dy}{dx} = \lambda$ setzt,

$$(6.)\qquad z' - z = \frac{1 + p^2 + pq\lambda}{r + s\lambda} = \frac{pq + (1 + q^2)\lambda}{s + t\lambda}.$$

Diese Gleichung stimmt mit Gleichung (26.) in § 154 überein, d. h. sie gibt dieselben Werte von λ, welche den größten und den kleinsten Krümmungshalbmesser lieferten. Es gilt also

Satz 1. *Von allen Normalen, welche der Normale im Flächenpunkte P unendlich nahe liegen, schneiden nur die in den Hauptnormalschnitten diese erste Normale.*

Dabei ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (1.), (3.) und (6.) der Abstand des Schnittpunktes M vom Flächenpunkte P

$$(7.)\qquad \varrho = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} = (z'-z)\sqrt{1+p^2+q^2}$$
$$= \frac{1+p^2+pq\lambda}{r+s\lambda}\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{pq+(1+q^2)\lambda}{s+t\lambda}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Da diese Werte mit denen in Gleichung (28.) des vorhergehenden Paragraphen übereinstimmen, so ist dieser Abstand ϱ der Krümmungshalbmesser, und der Schnittpunkt M ist der zugehörige Krümmungsmittelpunkt. Dies gibt

---

*) Die unendlich kleinen Größen höherer Ordnung $dpdz$ und $dqdz$ dürfen neben den unendlich kleinen Größen erster Ordnung vernachlässigt werden.



Satz 2. *Die Normale im Flächenpunkte P wird von den benachbarten Normalen in den Krümmungsmittelpunkten der beiden Hauptnormalschnitte getroffen.*

Die Mittelpunkte der größten und kleinsten Krümmungskreise für sämtliche Punkte der Fläche bilden selbst wieder eine Fläche, welche die „*Krümmungsmittelpunktsfläche*" genannt wird. Dabei gilt

Satz 3. *Jede Normale der ursprünglichen Fläche trifft die Krümmungsmittelpunktsfläche in zwei Punkten, in denen sie diese Fläche berührt.*

Beweis. Betrachtet man drei aufeinander folgende Normalen, so daß die erste von der zweiten und die zweite von der dritten geschnitten wird, so liegen die beiden Schnittpunkte auf der Krümmungsmittelpunktsfläche und auf der mittleren Normalen. Da sie außerdem einander unendlich nahe liegen, so ist die mittlere Normale eine Tangente an die Fläche. Dasselbe gilt von dem zweiten Punkte, den die Normale mit der Fläche gemein hat.

Die Normale im Flächenpunkte P heiße a und berühre die Krümmungsmittelpunktsfläche in den Punkten M_1 und M_2, und zwar sei M_1 der Schnittpunkt von a mit der unendlich nahen Normalen b, welche mit a in dem ersten Hauptnormalschnitte ε_1 liegt. Dann wird ε_1 die Krümmungsmittelpunktsfläche im Punkte M_2 berühren, denn sie hat mit dieser Fläche die beiden unendlich nahen Punkte gemein, in denen a berührt, und außerhalb dieser Geraden a noch den Punkt, in welchem die Fläche von b getroffen wird. Ebenso kann man zeigen, daß die Ebene ε_2 des zweiten Hauptnormalschnittes die Krümmungsmittelpunktsfläche im Punkte M_1 berührt. Dies gibt

Satz 4. *Die Ebenen ε_1 und ε_2 der beiden Hauptnormalschnitte berühren die Krümmungsmittelpunktsfläche bezw. in den Punkten M_2 und M_1.*

Da die Ebenen ε_1 und ε_2 aufeinander senkrecht stehen, so gilt noch

Satz 5. *Der scheinbare Umriß der Krümmungsmittelpunktsfläche, in der Richtung einer Normalen gesehen, besteht aus zwei Kurvenästen, die sich rechtwinklig schneiden.*

§ 156.

Krümmungsmaß von *Gauß*.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 268.)

Bei den ebenen Kurven wurde die Krümmung durch die Größe $\frac{d\varepsilon}{ds}$ gemessen, wobei $d\varepsilon$ der Kontingenzwinkel war, d. h. $d\varepsilon$ war der Winkel, den zwei unendlich nahe Tangenten miteinander bilden. Man kann aber auch unter $d\varepsilon$ den Winkel verstehen, den zwei unendlich nahe Normalen miteinander bilden, und kann diesen Winkel durch den Bogen eines Kreises messen. Zieht man nämlich in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 und dem Mittelpunkte O zwei Halbmesser, welche zu den beiden unendlich nahen Normalen parallel sind und auf dem Kreise den Bogen $d\varepsilon$ ausschneiden, so ist die Krümmung im Kurvenpunkte P das Verhältnis dieses Kreisbogens $d\varepsilon$ zu dem zugehörigen Kurvenbogen ds.

In ähnlicher Weise kann man im Raume ein Maß der Krümmung für eine Fläche

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

in jedem ihrer Punkte finden. Legt man nämlich zur Normalen a im Flächenpunkte P mit den Gleichungen

$$x' - x + p(z' - z) = 0, \quad y' - y + q(z' - z) = 0 \tag{2.}$$

durch den Nullpunkt O eine Parallele mit den Gleichungen

$$x' + pz' = 0, \quad y' + qz' = 0, \tag{3.}$$

so trifft diese die Kugelfläche mit der Gleichung

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \tag{4.}$$

welche mit dem Halbmesser 1 um den Nullpunkt beschrieben ist, in einem Punkte P' mit den Koordinaten

$$x' = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad y' = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \tag{5.}$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Jedem Punkte P auf der Fläche entspricht ein solcher Punkt P' auf der Kugel. Einer kleinen geschlossenen

Kurve, welche auf der Fläche den Punkt P einschließt, entspricht daher auf der Kugel eine kleine geschlossene Kurve um den Punkt P'. Wird der Flächeninhalt F bezw. F' dieser geschlossenen Kurven verschwindend klein, so kann man das Verhältnis von F' zu F als ein Maß für die Krümmung der Fläche im Punkte P ansehen.

Am einfachsten wird man für F das unendlich kleine Dreieck PP_1P_2 auf der Fläche annehmen, bei welchem die Eckpunkte P, P_1, P_2 bezw. die Koordinaten

$$x,\ y,\ z;\quad x+dx,\ y,\ z+pdx;\quad x,\ y+dy,\ z+qdy$$

haben. Dieses Dreieck liegt in der Tangentialebene des Punktes P, welche mit der XY-Ebene den Winkel γ bilden möge. Projiziert man dieses Dreieck in die XY-Ebene, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten dx und dy und dem Flächeninhalt

$$F\cos\gamma = \tfrac{1}{2}dxdy. \tag{6.}$$

Dem Dreieck PP_1P_2 auf der Fläche entspricht das Dreieck $P'P'_1P'_2$ auf der Kugel, dessen Ecken bezw. die Koordinaten

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad x',\ y',\ z'; \\ x'_1 = x' + \dfrac{\partial x'}{\partial x}dx,\ y'_1 = y' + \dfrac{\partial y'}{\partial x}dx,\ z'_1 = z' + \dfrac{\partial z'}{\partial x}dx; \\ x'_2 = x' + \dfrac{\partial x'}{\partial y}dy,\ y'_2 = y' + \dfrac{\partial y'}{\partial y}dy,\ z'_2 = z' + \dfrac{\partial z'}{\partial y}dy \end{array}\right. \tag{7.}$$

haben. Projiziert man dieses Dreieck in die XY-Ebene, so erhält man ein Dreieck, dessen Ecken bezw. die Koordinaten x', y'; x'_1, y'_1; x'_2, y'_2 haben. Da die Tangentialebene der Kugel im Punkte P' zur Tangentialebene der betrachteten Fläche im Punkte P parallel ist, so ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks

$$\begin{aligned} F'\cos\gamma &= \tfrac{1}{2}[x'(y'_1 - y'_2) + x'_1(y'_2 - y') + x'_2(y' - y'_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial y'}{\partial y}dy(x'_1 - x') - \frac{\partial y'}{\partial x}dx(x'_2 - x')\right], \end{aligned}$$

$$F'\cos\gamma = \tfrac{1}{2}dxdy\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right). \tag{8.}$$

Dividiert man diese Gleichung durch Gleichung (6.), so erhält man

$$(9.)\qquad K = \frac{F'}{F} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}.$$

Nun ist nach den Gleichungen (5.)

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{-(1+q^2)r + pqs}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{-(1+q^2)s + pqt}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{pqr - (1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{pqs - (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

folglich wird mit Rücksicht auf Gleichung (32.) in § 154

$$(10.)\qquad K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Von dem *Gauß*schen Krümmungsmaß wird besonders bei der Biegung der Flächen Gebrauch gemacht. Dabei heist F_2 eine Biegungsfläche der Fläche F_1, wenn sich die Punkte von F_2 derart den Punkten von F_1 zuordnen lassen, daß entsprechende Kurvenstücke unveränderte Länge behalten. Daraus folgt auch, daß der Flächeninhalt einander entsprechender Figuren gleich groß ist. Es gilt dann der Satz, dessen Beweis hier aber übergangen werden möge:

Das Krümmungsmaß bleibt bei der Biegung der Flächen unverändert.

XX. Abschnitt.

Anwendungen auf die analytische Geometrie der Ebene.

§ 157.

Theorie der Umhüllungskurven oder Enveloppen.

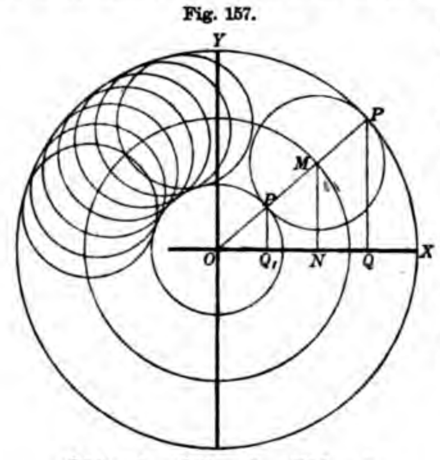
(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 264.)

Ist eine Gleichung zwischen x, y und u, nämlich

$$F(x,\ y,\ u) = 0 \tag{1.}$$

gegeben, so stellt dieselbe für jeden konstanten Wert von u eine Kurve dar. Da es aber unendlich viele Werte von u gibt, so entspricht der Gleichung (1.) eine ganze *Schar* von Kurven. So entspricht z. B. der Gleichung

Fig. 157.



$OM = b,\quad ON = \xi,\quad NM = \eta.$

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0$$

eine ganze Schar von *konzentrischen Kreisen*, da der Halbmesser u noch unendlich viele Werte haben darf. Der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} = 1$$

entspricht eine Schar *konfokaler Ellipsen* und *Hyperbeln*.

Der Gleichung

$$F(x,\ y,\ u) = (x - b\cos u)^2 + (y - b\sin u)^2 - a^2 = 0$$

entspricht eine ganze Schar von *Kreisen* (vgl. Fig. 157),

denn für jeden Wert von u erhält man einen Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$\xi = b\cos u, \quad \eta = b\sin u$$

hat. Zwischen ξ und η besteht daher die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 - b^2 = 0,$$

d. h. der Mittelpunkt M des Kreises durchläuft selbst wieder einen Kreis, welcher mit dem Halbmesser b um den Anfangspunkt O der Koordinaten beschrieben ist.

Die Größe u nennt man dabei den *„(variablen) Parameter"*.

Sind nun u und $u_1 = u + \Delta u$ zwei benachbarte Werte von u, so gibt die Zusammenstellung der beiden Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, y, u_1) = 0 \tag{2.}$$

die Schnittpunkte der beiden entsprechenden Kurven.

Die Koordinaten dieser Schnittpunkte genügen daher auch den beiden Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{F(x, y, u + \Delta u) - F(x, y, u)}{\Delta u} = 0. \tag{3.}$$

Läßt man jetzt Δu unendlich klein werden, so gehen diese Gleichungen über in

$$F(x, y, u) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0 \tag{4.}$$

und geben die Schnittpunkte der Kurve $F(x, y, u) = 0$ mit einer unendlich nahen Kurve.

Durch Elimination von u aus diesen beiden Gleichungen erhält man eine Gleichung zwischen x und y allein, nämlich

$$S(x, y) = 0, \tag{5.}$$

welche *den geometrischen Ort aller Schnittpunkte von je zwei unendlich nahen Kurven der gegebenen Kurvenschar darstellt.*

Dieser geometrische Ort ist eine Kurve, welche die *„einhüllende Kurve"*, *„Umhüllungskurve"* oder *„Enveloppe"* genannt wird, da sie die sämtlichen Kurven der gegebenen Kurvenschar einhüllt. Es gilt nämlich folgender

Satz 1. *Die Tangente in jedem Punkte P der Umhüllungskurve*

$$S(x, y) = 0$$

ist auch Tangente an eine der Kurven der gegebenen Kurvenschar in demselben Punkte P.

Zum Beweise dieses Satzes betrachte man drei benachbarte Kurven C, C_1, C_2 des gegebenen Kurvensystems (vgl. Fig. 158), welche den Werten u, u_1, u_2 des Parameters entsprechen. Ein Schnittpunkt der Kurven C und C_1 heiße P. Dieser Schnittpunkt gehe in den Punkt P_1 über, wenn die Kurve C in C_1 und die Kurve C_1 in C_2 übergeht. Die Punkte P und P_1 liegen also beide auf der Kurve C_1 und rücken einander unendlich nahe, wenn die Werte u, u_1, u_2 unendlich wenig voneinander verschieden sind, d. h. wenn die Kurven C, C_1, C_2 einander unendlich nahe rücken. Gleichzeitig rücken die Punkte P und P_1 auf die Kurve mit der Gleichung

Fig. 158.

$$S(x, y) = 0,$$

weil sie Schnittpunkte von je zwei unendlich nahen Kurven der gegebenen Kurvenschar sind. Deshalb ist die Verbindungslinie dieser unendlich nahen Punkte P und P_1 eine Tangente der Kurve C_1 und gleichzeitig auch der Kurve

$$S(x, y) = 0.$$

Dadurch ist bewiesen, daß die beiden Kurven im Punkte P (oder in dem unendlich nahen Punkte P_1) eine gemeinsame Tangente haben, daß sie sich also im Punkte P berühren.

Was von C_1 gilt, gilt ebenso von jeder beliebigen Kurve der gegebenen Kurvenschar. Es ist also hiermit bewiesen, daß die Kurve

$$S(x, y) = 0$$

sämtliche Kurven des gegebenen Kurvensystems berührt; sie ist daher die *Umhüllungskurve* oder *Enveloppe*.

Dasselbe Resultat findet man auch durch Rechnung. Die Gleichung

$$S(x, y) = 0$$

kann man nämlich aus den Gleichungen (4.) dadurch herleiten, daß man den Parameter u als Funktion von x und y darstellt, indem man die Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0 \quad \text{auf die Form} \quad u = \varphi(x, y)$$

bringt, und daß man sodann diesen Wert von u in die Gleichung

$$F(x, y, u) = 0$$

einsetzt. Dies gibt also

$$S(x, y) = F[x, y, \varphi(x, y)], \tag{6.}$$

d. h.

$$S(x, y) = F(x, y, u) \quad \text{für} \quad u = \varphi(x, y). \tag{6a.}$$

Daraus folgt

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial S}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

Da nun aber für den betrachteten Punkt P mit den Koordinaten x, y

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

ist, so gehen die Gleichungen (7.) über in

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}, \tag{7a.}$$

folglich hat nach Formel Nr. 137 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{\frac{\partial S}{\partial y}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{8.}$$

in dem betrachteten Punkte P für beide Kurven denselben Wert, d. h. die beiden Kurven haben in diesem Punkte dieselbe Tangente.

Es ist allerdings noch hervorzuheben, daß die Elimination von u aus den Gleichungen (4.) durchaus nicht immer die Gleichung einer *reellen* Kurve liefert.

Dies folgt schon daraus, daß nicht jede Schar von gleichartigen Kurven eine Umhüllungskurve besitzt. Bei den konzentrischen Kreisen

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0$$

z. B. schneidet kein Kreis den anderen in einem reellen Punkte, folglich gibt es für diese Kurvenschar auch keine Umhüllungskurve.

Ebensowenig haben die einander benachbarten konfokalen Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} = 1, \quad (-b^2 < u < +\infty)$$

oder die einander benachbarten konfokalen Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} = 1, \quad (-a^2 < u < -b^2)$$

reelle Schnittpunkte miteinander gemein, folglich gibt es bei dieser Kurvenschar auch keine Umhüllungskurve.

Dagegen schneidet jeder der Kreise

$$(9.) \quad F(x, y, u) = (x - b\cos u)^2 + (y - b\sin u)^2 - a^2 = 0$$

den folgenden in zwei reellen Punkten. Deshalb gibt es in diesem Falle eine Umhüllungskurve. Dabei wird

$$(10.) \quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 2(x - b\cos u)b\sin u - 2(y - b\sin u)b\cos u = 0,$$

oder

$$(10a.) \quad (x - b\cos u)\sin u = (y - b\sin u)\cos u,$$

oder

$$(10b.) \quad x\sin u = y\cos u,$$

also $\quad y = x\operatorname{tg} u, \quad y - b\sin u = (x - b\cos u)\operatorname{tg} u.$

Setzt man diese Werte in Gleichung (9.) ein, so findet man

$$(11.) \quad (x - b\cos u)^2(1 + \operatorname{tg}^2 u) = a^2, \quad \text{oder} \quad (x - b\cos u)^2 = a^2\cos^2 u,$$

folglich ist

$$(12.) \quad x = (b \pm a)\cos u, \quad y = (b \pm a)\sin u,$$

also

$$(13.) \quad x^2 + y^2 = (b \pm a)^2.$$

Nimmt man in diesen Gleichungen das obere Zeichen, so erhält man einen Kreis mit dem Halbmesser $b + a$; und nimmt man das untere Zeichen, so erhält man einen Kreis mit dem Halbmesser $b - a$. Die Umhüllungskurve zerfällt also bei diesem Beispiele in zwei konzentrische Kreise. (Vgl. Fig. 157.)

§ 158.

Übungs-Aufgaben.

Aufgabe 1. Ein System von geraden Linien (Fig. 159) sei durch die Bedingung bestimmt, daß die zwischen den Koordinaten-Achsen liegenden Abschnitte derselben die konstante Länge c haben. Man soll die Gleichung ihrer Umhüllungskurve aufstellen.

Auflösung. Es seien $OA = a$ und $OB = b$ die Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinaten-Achsen abschneidet, dann ist bekanntlich ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0, \tag{1.}$$

oder

$$bx + ay - ab = 0.$$

Der Abschnitt AB der Geraden zwischen den beiden Koordinaten-Achsen ist daher gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$. Hat also dieser Abschnitt die konstante Länge c, und bezeichnet man den Winkel OAB mit u, so wird

$$(2.)\quad a = c\cos u, \qquad (3.)\quad b = c\sin u;$$

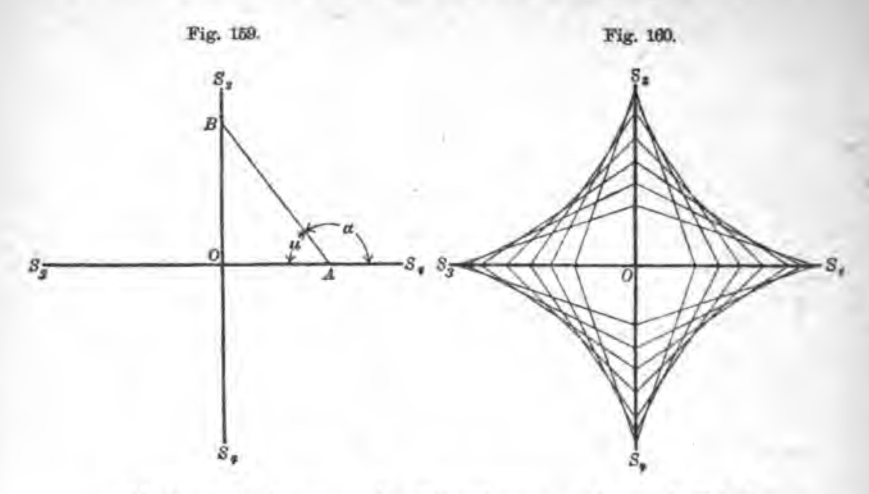
die Gleichung der Geraden AB geht daher über in

$$F(x, y, u) = x\sin u + y\cos u - c\sin u\cos u = 0. \tag{4.}$$

Dabei ergänzt der Winkel u den Winkel α, welchen die Gerade AB mit der positiven Richtung der X-Achse bildet, zu 180^0.

Um die Umhüllungskurven dieser Schar gerader Linien zu finden, bilde man

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = x\cos u - y\sin u - c(\cos^2 u - \sin^2 u) = 0. \tag{5.}$$



Multipliziert man die Gleichungen (4.) und (5.) bezw. mit $\sin u$ und $\cos u$, so erhält man durch Addition

(6.) $$x = + c\cos^3 u.$$

Multipliziert man sie dagegen bezw. mit $\cos u$ und $-\sin u$, so findet man durch Addition

(7.) $$y = + c\sin^3 u.$$

Wenn es sich, wie in der vorstehenden Aufgabe, um eine Schar gerader Linien handelt, wenn also die Gleichung $F(x, y, u) = 0$ in bezug auf x und y vom *ersten* Grade ist, so wird im allgemeinen auch die Gleichung $\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0$ vom *ersten* Grade in bezug auf x und y sein. Dann braucht man u nicht aus diesen beiden Gleichungen zu eliminieren, sondern wird x und y als Funktionen der dritten Veränderlichen u darstellen, eine Rechnung, die in den meisten Fällen sehr viel leichter auszuführen ist als die Elimination.

In der vorliegenden Aufgabe geben die Gleichungen (6.) und (7.) die Koordinaten des Schnittpunktes der dem Werte u entsprechenden Geraden mit der unendlich nahen. Dieser Punkt ist daher auch ein Punkt der Umhüllungskurve. Die Gleichungen

(8.) $$x = c\cos^3 u, \quad y = c\sin^3 u$$

stellen also die Umhüllungskurve dar, wenn u alle Werte

von 0 bis 2π durchläuft. Man kann aber aus diesen Gleichungen auch den Parameter u eliminieren. Erhebt man sie nämlich zur Potenz $\frac{2}{3}$, so erhält man

$$x^{\frac{2}{3}} = + c^{\frac{2}{3}}\cos^2 u, \quad y^{\frac{2}{3}} = + c^{\frac{2}{3}}\sin^2 u,$$

und wenn man diese Gleichungen addiert,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}. \tag{9.}$$

Dies ist die Gleichung der Umhüllungskurve, und zwar ist die Kurve unter dem Namen „*Astroide*“ bekannt. (Vgl. Fig. 160.)

Aufgabe 2. Es ist durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = x\cos(3u) + y\sin(3u) - a\cos u = 0 \tag{10.}$$

eine Schar von geraden Linien gegeben; man soll die von ihnen eingehüllte Kurve bestimmen. (Vgl. Fig. 162.)

Auflösung. Hier wird

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -3x\sin(3u) + 3y\cos(3u) + a\sin u = 0. \tag{11.}$$

Elimmiert man aus diesen Gleichungen y, bezw. x, so erhält man

$$\begin{cases} 3x = a[3\cos u\cos(3u) + \sin u\sin(3u)], \\ 3y = a[3\cos u\sin(3u) - \sin u\cos(3u)]. \end{cases} \tag{12.}$$

Nun ist aber

$$\cos u\cos(3u) + \sin u\sin(3u) = \cos(2u),$$
$$2\cos u\cos(3u) = \cos(4u) + \cos(2u);$$

ferner ist

$$\cos u\sin(3u) - \sin u\cos(3u) = \sin(2u),$$
$$2\cos u\sin(3u) = \sin(4u) + \sin(2u),$$

folglich wird

$$\begin{cases} 3x = a[\cos(4u) + 2\cos(2u)], \\ 3y = a[\sin(4u) + 2\sin(2u)]. \end{cases} \tag{13.}$$

Setzt man $a = 3a_1$ und $2u = t + \pi$, so wird

$$\begin{cases} \cos(2u) = -\cos t, & \sin(2u) = -\sin t, \\ \cos(4u) = +\cos(2t), & \sin(4u) = +\sin(2t), \end{cases} \tag{14.}$$

und die Gleichungen (13.) gehen über in

(15.) $x = -a_1[2\cos t - \cos(2t)], \quad y = -a_1[2\sin t - \sin(2t)].$

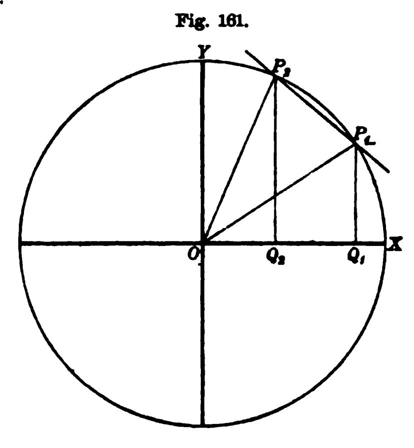


Fig. 161.

Dies sind bekanntlich die Gleichungen der *Kardioide.* Die Kardioide war ein besonderer Fall der Epizykloiden, welchen man erhält, wenn der Halbmesser des *festen* Kreises dem Halbmesser des *rollenden* Kreises gleich ist. Durch die vorliegende Aufgabe findet man also eine andere Erzeugungsweise der Kardioide, die sich dann auch so verallgemeinern läßt, daß man jede beliebige Epizykloide (oder Hypozykloide) erhält.

Die Gleichung (10.) stellt nämlich eine Gerade dar (vgl. Fig. 161), welche durch die beiden Punkte P_1 und P_2 mit den Koordinaten

$$x_1 = a\cos(2u), \quad y_1 = a\sin(2u)$$

und

$$x_2 = a\cos(4u), \quad y_2 = a\sin(4u)$$

hindurchgeht, denn diese Wertepaare von x und y befriedigen die Gleichung (10.). Nun wird aber

(16.) $$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \text{und} \quad x_2^2 + y_2^2 = a^2,$$

d. h. die Punkte P_1 und P_2 liegen beide auf einem Kreise, der mit dem Halbmesser a um den Anfangspunkt O der Koordinaten beschrieben ist. Dabei sind die Winkel, welche die Halbmesser OP_1 und OP_2 mit der X-Achse bilden,

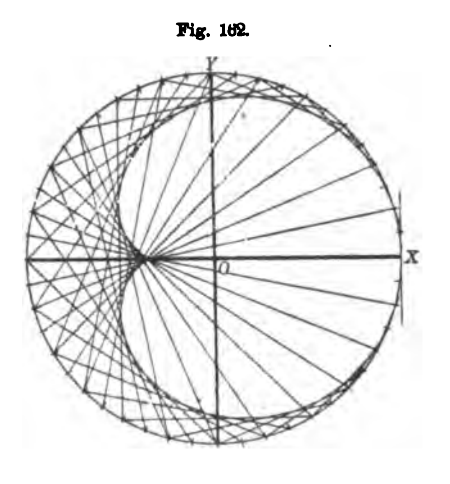
$$\sphericalangle XOP_1 = 2u, \quad \sphericalangle XOP_2 = 4u = 2 \sphericalangle XOP_1.$$

Wenn sich also der Parameter u verändert, so bewegen sich die Punkte P_1 und P_2 beide auf diesem Kreise fort, der Punkt P_2 aber doppelt so schnell wie der Punkt P_1.

Dies gibt folgende Erzeugung der Kardioide:

Bewegen sich auf einem Kreise zwei Punkte P_1 und P_2 so, daß P_2 doppelt so schnell läuft wie P_1, so umhüllt die Gerade P_1P_2 eine Kardioide. (Vgl. Fig. 162.)

Fig. 162.



In ähnlicher Weise können auch die anderen Epizykloiden erzeugt werden, wenn der Punkt P_2 auf dem Kreise m-mal so schnell fortschreitet wie der Punkt P_1.

Dabei war bisher vorausgesetzt, daß die Punkte P_1 und P_2 den Kreis in gleicher Richtung durchlaufen. Wenn sie aber den Kreis in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so umhüllt die Gerade P_1P_2 eine „*Hypozykloide*".

Man kann sich in folgender Weise von dem vorstehenden durch Zeichnung überzeugen. Man teile den Umfang eines Kreises in eine Anzahl gleicher Teile. (Vgl. Fig. 162.) Es sei z. B. diese Anzahl gleich 48. Dann bezeichne man die Teilpunkte der Reihe nach durch die Nummern

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots 47, 48,$$

wobei der Punkt 48 mit dem Punkte 0 zusammenfällt. Jetzt verbinde man die Punkte

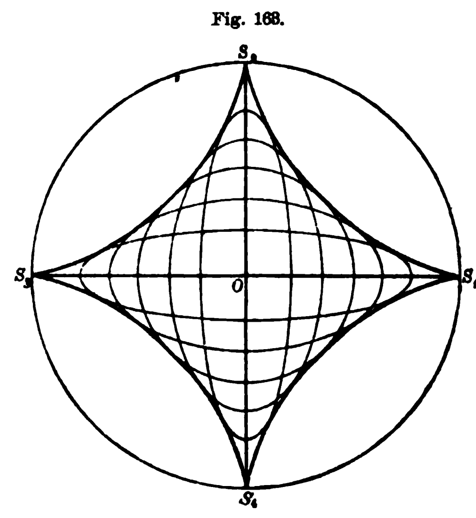
$$1 \text{ und } 2, \ 2 \text{ und } 4, \ 3 \text{ und } 6, \ldots 24 \text{ und } 48, \ 25 \text{ und } 2, \ldots,$$

allgemein k und $2k$ durch gerade Linien. Auf diese Weise erhält man 48 Tangenten der *Kardioide*, und zwar wird man daraus die Gestalt der Kardioide sicherer gewinnen, als wenn man die Kurve punktweise konstruiert hätte.

Verbindet man dagegen die Punkte k und mk durch Gerade, so erhält man eine andere *Epizykloide*, welche der Zahl m entspricht, mit großer Genauigkeit als die *Umhüllungskurve* ihrer Tangenten.

In ähnlicher Weise kann man auch die *Hypozykloide* als Umhüllungskurve ihrer Tangenten zeichnen. In diesem Falle wird es zweckmäßig sein, die Anzahl der Teilpunkte auf dem Kreise etwas größer anzunehmen.

Fig. 163.



Aufgabe 3. Es ist eine Schar konzentrischer Ellipsen gegeben, deren Halbachsen mit den Koordinaten-Achsen zusammenfallen und die konstante Summe c haben; man soll die Gleichung der Umhüllungskurve bestimmen. (Vgl. Fig. 163.)

Auflösung. Die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Da aber die Achsen veränderliche Länge und die konstante Summe c haben sollen, so setze man

$$a = u \quad \text{und} \quad b = c - u.$$

Dadurch wird die Gleichung der gegebenen Kurvenschar

$$(17.)\quad F(x, y, u) = (c - u)^2x^2 + u^2y^2 - u^2(c - u)^2 = 0.$$

Hieraus folgt durch partielle Differentiation nach u

$$(18.)\quad -2(c - u)x^2 + 2uy^2 - 2u(c - u)(c - 2u) = 0,$$

oder, wenn man mit $-\frac{u}{2}$ multipliziert,

$$(18a.)\quad (c - u)ux^2 - u^2y^2 + u^2(c - u)(c - 2u) = 0.$$

Indem man die Gleichungen (17.) und (18a.) addiert, findet man

$$(c - u)cx^2 - (c - u)u^3 = 0,$$

oder

$$(19.)\qquad x^2 = \frac{u^3}{c}, \quad x^{\frac{2}{3}} = \frac{u}{\sqrt[3]{c}}.$$

Setzt man diesen Wert von x^2 in die Gleichung (17.) ein, so folgt

$$(20.)\qquad y^2 = \frac{(c-u)^3}{c}, \quad y^{\frac{2}{3}} = \frac{c-u}{\sqrt[3]{c}}.$$

Deshalb wird

$$(21.)\qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}},$$

d. h. die Umhüllungskurve ist wieder eine *Astroide*.

Aufgabe 4. Es ist eine Schar von Parabeln durch die Gleichung

$$(22.)\qquad F(x, y, u) = 4c(y - ux) + (1 + u^2)x^2 = 0$$

gegeben; man soll ihre Umhüllungskurve bestimmen. (Vgl. Fig. 164.)

Auflösung. Hier ist

$$(23.)\qquad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -4cx + 2ux^2 = 0.$$

Dies gibt die beiden Lösungen

$$(24.)\qquad x = 0$$

und

$$(24a.)\qquad u = \frac{2c}{x}.$$

Fig. 164.

Setzt man diesen Wert von u in die Gleichung (22.) ein, so erhält man für die Umhüllungskurve die Gleichung

$$(25.)\qquad x^2 + 4c(y - c) = 0.$$

Die Umhüllungskurve ist also wieder eine *Parabel*. Außerdem schneiden sich alle Parabeln der gegebenen Schar im Punkte O, welcher als ein Teil der Umhüllungs-

kurve zu betrachten ist und der Lösung durch Gleichung (24.) entspricht

Aufgabe 5. Es ist eine Schar von *Kreisen* durch die Gleichung

$$F(x, y, u) = (x - u)^2 + y^2 - 2up + p^2 = 0 \tag{26.}$$

gegeben; man soll die Umhüllungskurve bestimmen. (Vgl. Fig. 165.)

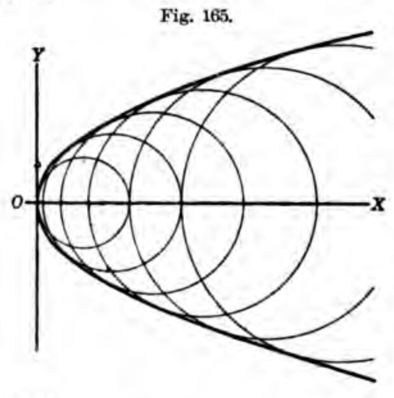
Auflösung. Hier ist

$$\frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = -2(x - u) - 2p = 0, \tag{27.}$$

oder

$$x = u - p. \tag{28.}$$

Fig. 165.



Setzt man diesen Wert von x in die Gleichung (26.) ein, so wird

$$y = \pm \sqrt{2p(u - p)}. \tag{29.}$$

Die Gleichungen (28.) und (29.) geben die Schnittpunkte des Kreises, der dem Parameter u entspricht, mit dem unendlich nahen. Diese Schnittpunkte werden erst reell, wenn

$$u \geqq p. \tag{30.}$$

Die Kreise selbst dagegen werden schon reell, wenn

$$2u \geqq p. \tag{31.}$$

Liegt u zwischen $\frac{p}{2}$ und p, so sind die Kreise zwar reell, schneiden aber einander nicht. In diesem Falle enthält also die gegebene Kurvenschar unendlich viele Kurven, welche die benachbarten Kurven in keinem reellen Punkte schneiden.

Indem man schließlich noch u aus den Gleichungen (26.) und (28.) eliminiert, erhält man die Gleichung der Umhüllungskurve, nämlich

$$y^2 = 2px \tag{32.}$$

Dies ist die Gleichung einer *Parabel*.

§ 159.

Doppelpunkte und isolierte Punkte.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 265.)

Wenn eine Kurve, deren Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{1.}$$

sein möge, zweimal durch denselben Punkt hindurchgeht, so nennt man diesen Punkt einen „*Doppelpunkt* der Kurve". So hat z. B. das *Folium Cartesii* mit der Gleichung

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

im Nullpunkte einen Doppelpunkt. (Vgl. Fig. 146 auf Seite 600.) Ebenso hat die *Lemniskate* mit der Gleichung

$$r^2 = a^2\cos(2\varphi),$$

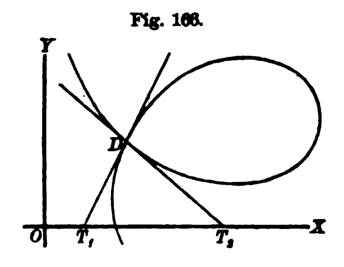
oder

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

im Nullpunkte einen Doppelpunkt. (Vgl. Fig. 130 und 133 auf Seite 501 und 508.)

Um nun zu untersuchen, für welche Werte von x und y eine Kurve einen Doppelpunkt hat, braucht man nur zu beachten, daß in einem Doppelpunkte nicht *eine*, sondern *zwei* Tangenten an die Kurve möglich sind, denn man kann an jeden der beiden Kurvenzweige, welche durch den Doppelpunkt hindurchgehen, eine Tangente legen. (Vgl. Fig. 166.)

Fig. 166.



Ist nun $F(x, y)$ eine *eindeutige* Funktion von x und y, so gilt im allgemeinen dasselbe von

$$F_1(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}; \tag{2.}$$

es wird also für jedes Wertepaar x, y die Richtungstangente

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)} \tag{3.}$$

im allgemeinen nur einen einzigen Wert haben, so daß der zugehörige Kurvenpunkt nur ein einfacher Punkt sein kann.

Nur in dem besonderen Falle, wo $F_1(x, y)$ und $F_2(x, y)$ beide gleich 0 sind, erhält der Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$; dann kann also $\operatorname{tg}\alpha$ *möglicherweise* mehr als einen Wert haben. Die Methode, welche in § 66 zur Berechnung von Ausdrücken angegeben wurde, welche an der Grenze die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, führt hierbei in folgender Weise zum Ziele. Bezeichnet man wieder die zweiten partiellen Ableitungen durch Indizes, so folgt aus Gleichung (3.), indem man Zähler und Nenner einzeln differentiiert,

$$\lim \frac{dy}{dx} = -\lim \frac{F_{11} + F_{12}\frac{dy}{dx}}{F_{21} + F_{22}\frac{dy}{dx}}$$

für

$$\lim F_1(x, y) = 0, \quad \lim F_2(x, y) = 0,$$

also, wenn man nach Einsetzen der in Betracht kommenden Werte von x und y das Zeichen limes fortläßt,

$$\left(F_{21} + F_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(F_{11} + F_{12}\frac{dy}{dx}\right),$$

oder

$$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \tag{4.}$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}}. \tag{4a.}$$

Dasselbe Resultat findet man auch, indem man die Gleichung

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5.}$$

nochmals nach x differentiiert; dann erhält man nämlich

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2F(x, y)}{dx^2} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} \\ &+ \left[\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]\frac{dy}{dx} + F_2(x, y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

oder

(6a.) $$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_2\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt man im allgemeinen $\frac{d^2y}{dx^2}$; gilt aber die Voraussetzung

(7.) $$F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$

so erhält man wieder

(8.) $$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

oder

(8a.) $$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}}.$$

Hieraus erkennt man, daß unter der gemachten Voraussetzung $\frac{dy}{dx}$ *zwei* Werte erhält, daß es also in dem betrachteten Punkte *zwei* Tangenten an die Kurve gibt, deren Richtungen durch die Gleichung (8a.) bestimmt sind.

Diese Untersuchung gibt daher den Satz:

Ist der Punkt D mit den Koordinaten x, y ein Doppelpunkt der Kurve, so müssen die drei Gleichungen

(9.) $$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden.

Die beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$, welche man aus der quadratischen Gleichung (8.) erhält, sind *reell*, wenn

(10.) $$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} > 0;$$

sie sind dagegen imaginär, wenn

(11.) $$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} < 0.$$

In dem ersten Falle erhält man einen *eigentlichen* Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten, in dem zweiten Falle aber sind die Tangenten *imaginär*.

Ein Beispiel möge zeigen, wie die Kurve in dem Doppelpunkte beschaffen ist, je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt. Es sei nämlich

(12.) $$F(x, y) = y^2 - (x - a)^2(x - b) = 0,$$

oder

$$F(x, y) = y^2 - x^3 + (2a + b)x^2 - (a^2 + 2ab)x + a\cdot \tag{12a.}$$

dann wird

$$\begin{cases} F_1(x, y) = -3x^2 + (4a + 2b)x - (a^2 + 2ab) \\ \qquad\qquad = (x - a)(-3x + a + 2b), \\ F_2(x, y) = 2y, \end{cases} \tag{13.}$$

$$F_{11} = -6x + (4a + 2b), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2. \tag{14.}$$

Für $x = a$, $y = 0$ werden also die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

befriedigt, und man erhält

$$F_{11} = -2(a - b), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2.$$

Deshalb wird nach Gleichung (8a.)

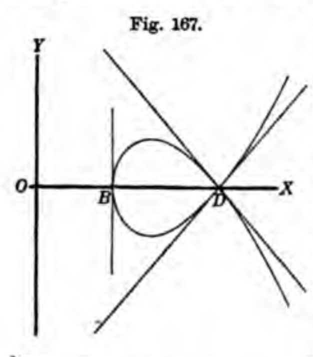
$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{a - b}. \tag{15.}$$

Ist $a > b$, so wird $\sqrt{a - b}$ reell; man kann in diesem Falle nicht nur die Tangenten in dem Doppelpunkte D mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$ zeichnen, sondern es ergibt sich auch aus Gleichung (12.), oder aus der Gleichung

$$y = \pm(x - a)\sqrt{x - b} \tag{12b.}$$

leicht die Gestalt der Kurve. Sie ist symmetrisch zur X-Achse, und y wird für Werte von x, die kleiner als b sind, imaginär, d. h. die Kurve liegt rechts von der Geraden, welche man durch den Punkt B mit den Koordinaten $x = b$, $y = 0$ parallel zur Y-Achse ziehen kann. Diese Gerade wird von der Kurve im Punkte B berührt; und zwar gehen von B aus zwei symmetrische Zweige der Kurve, welche sich im Doppelpunkte D schneiden, so daß die Kurve zwischen B und D eine Schleife bildet. (Vgl. Fig. 167.)

Fig. 167.



Ist dagegen $a < b$, so folgt aus der Gleichung

$$y = \pm(x - a)\sqrt{x - b},$$

daß der Punkt D mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$

wieder ein Punkt der Kurve ist. Für alle Werte von x, die kleiner als a sind, und für alle Werte von x, die zwar größer als a, aber kleiner als b sind, wird y imaginär, so daß auch hier die Kurve eigentlich erst mit dem Punkte B beginnt, dessen Koordinaten $x = b$, $y = 0$ sind. Der Punkt D ist daher in diesem Falle ein *„isolierter Punkt"* oder *„Einsiedler"*. Ein solcher isolierter Punkt ist daher auch als ein Doppelpunkt anzusehen, in dem sich zwei imaginäre Kurvenzweige schneiden. Deshalb werden in diesem Falle auch die beiden Tangenten imaginär. (Vgl. Fig. 168.)

Fig. 168.

Für

$$x = \frac{4b - a}{3}, \quad y = \pm \frac{4(b-a)}{3}\sqrt{\frac{b-a}{3}}$$

hat die Kurve zwei Wendepunkte W_1 und W_2, wie man durch die früher angegebenen Methoden leicht bestätigen kann.

§ 160.

Übungs-Aufgaben.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 265.)

Aufgabe 1. Man soll beweisen, daß beim *Folium Cartesii* der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist, und soll die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte bestimmen. (Vgl. Fig. 169.)

Auflösung. Hier ist

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \doteq 0, \tag{1.}$$

also

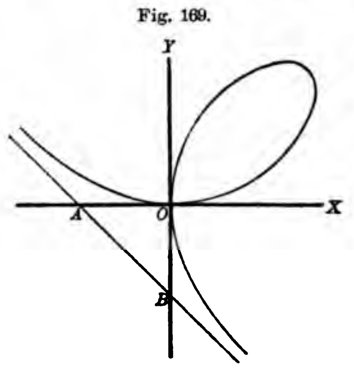
$$F_1(x, y) = 3x^2 - 3ay, \quad F_2(x, y) = 3y^2 - 3ax, \tag{2.}$$

$$F_{11} = 6x, \quad F_{12} = -3a, \quad F_{22} = 6y. \tag{3.}$$

Für $x = 0$, $y = 0$ werden die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

Fig. 169.



gleichzeitigt befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein Doppelpunkt. Um in diesem Doppelpunkte die Richtung der Tangenten zu bestimmen, setzt man die Werte von F_{11}, F_{12}, F_{22} in die Formel Nr. 265 der Tabelle ein. Dies gibt

$$\text{(4.)}\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$= \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = \frac{F_{11}}{-F_{12} \mp \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}},$$

oder

$$\text{(4a.)}\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$= \lim_{x=0} \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 36xy}}{6y} = \lim_{x=0} \frac{6x}{3a \mp \sqrt{9a^2 - 36xy}}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung das obere Zeichen und setzt $x = 0$, $y = 0$, so erhält man aus der ersten Darstellungsweise

$$\text{(5.)}\qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = \infty,$$

während man nach der zweiten Darstellungsweise auf die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ geführt wird.

Nimmt man dagegen das untere Zeichen, so erhält $\operatorname{tg}\alpha$ nach der ersten Darstellungsweise die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, nach der zweiten Darstellungsweise findet man aber

$$\text{(6.)}\qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = 0.$$

Dies gibt

$$\text{(7.)}\qquad \alpha_1 = 90^0, \quad \alpha_2 = 0^0,$$

d. h. *die beiden Koordinaten-Achsen sind Tangenten in dem Doppelpunkte der Kurve.*

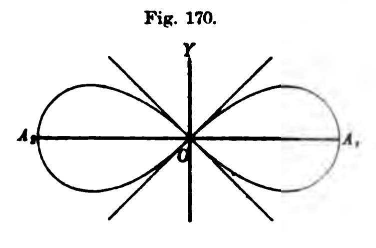


Fig. 170.

Aufgabe 2. Man soll beweisen, daß bei der *Lemniskate* der Nullpunkt ein Doppelpunkt ist, und soll die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte bestimmen. (Vgl. Fig. 170.)

Auflösung. Hier ist

$$F(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 + a^2y^2 = 0, \tag{8.}$$

also

$$F_1(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 - 2a^2x, \quad F_2(x, y) = 4x^2y + 4y^3 + 2a^2y, \tag{9.}$$

$$F_{11} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2, \quad F_{12} = 8xy, \quad F_{22} = 4x^2 + 12y^2 + 2a^2. \tag{10.}$$

Für $x = 0$, $y = 0$ werden die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein Doppelpunkt. Um die Richtung der beiden Tangenten in diesem Punkte zu bestimmen, beachte man, daß für $x = 0$, $y = 0$

$$F_{11} = -2a^2, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = +2a^2 \tag{11.}$$

wird. Dies gibt nach Formel Nr. 265 der Tabelle

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = \pm 1, \tag{12.}$$

also

$$\alpha_1 = +45^0, \quad \alpha_2 = -45^0, \tag{13.}$$

d. h. die beiden Tangenten im Nullpunkte halbieren die Winkel, welche die Koordinaten-Achsen miteinander bilden.

Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

erhält man der Reihe nach unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise die Gleichungen

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{14.}$$

$$\frac{d^2F(x, y)}{dx^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{15.}$$

$$(16.)\quad \frac{d^3F(x,\,y)}{dx^3}$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Bei *einfachen* Kurvenpunkten findet man

aus Gleichung (14.) die Größe $\frac{dy}{dx}$,

" " (15.) " " $\frac{d^2y}{dx^2}$,

" " (16.) " " $\frac{d^3y}{dx^3}$;

ist aber der Punkt ein Doppelpunkt, so wird

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_1(x,\,y) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2(x,\,y) = 0;$$

dann reduzieren sich die Gleichungen (15.) und (16.) auf

$$(15\text{a.})\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} = F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$(16\text{a.})\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder

$$(16\text{b.})\quad F_{111} + 3F_{112}\frac{dy}{dx} + 3F_{122}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{222}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$
$$+ 3\left(F_{12} + F_{22}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Da die Gleichung (14.) zur Berechnung von $\frac{dy}{dx}$ illusorisch wird, liefert Gleichung (15a.) die *beiden* Werte dieser Größe; aus Gleichung (16a.) oder (16b.) findet man dann die zugehörigen Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Für die *Lemniskate* wird z. B.

$$(17.)\quad F_{111} = 24x, \quad F_{112} = 8y, \quad F_{122} = 8x, \quad F_{222} = 24y,$$

Ausdrücke, welche für $x = 0$, $y = 0$ sämtlich verschwinden. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (11.) und (12.) geht daher in diesem Falle die Gleichung (16b.) über in

(18.) $$3\left(0 + 2a^2 \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad \text{oder} \quad \pm 6a^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Die Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ sind also *beide* gleich Null. Daraus folgt, daß *die beiden Kurvenzweige der Lemniskate, welche sich in ihrem Doppelpunkte schneiden, gleichzeitig Wendepunkte sind.* (Vgl. Fig. 170.)

§ 161.

Mehrfache Punkte.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 266.)

Wenn für ein Wertepaar x, y nicht nur die Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

befriedigt werden, sondern außerdem auch noch die Gleichungen

$$F_{11}(x, y) = 0, \quad F_{12}(x, y) = 0, \quad F_{22}(x, y) = 0,$$

so ist es nicht mehr möglich, die Werte von $\frac{dy}{dx}$ nach den Angaben der Formel Nr. 265 der Tabelle zu berechnen; dann reduziert sich aber die allgemein geltende Gleichung

(1.) $$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

auf

(2.) $$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} = 0,$$

oder

(2a.) $$F_{111} + 3F_{112}\frac{dy}{dx} + 3F_{122}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{222}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom *dritten Grade* und liefert daher *drei* Werte dieser Größe. In dem zugehörigen Kurvenpunkte gibt es daher *drei* Tangenten der Kurve, woraus man schließen kann, daß drei Äste der Kurve durch diesen Punkt hindurchgehen.

Ein solcher Kurvenpunkt heißt daher ein „*dreifacher Punkt* der Kurve“.

Sind auch die *dritten* partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ sämtlich gleich Null, so kann man auch aus der Gleichung (2a.) noch nicht die Größe $\frac{dy}{dx}$ berechnen; dann gilt aber, wie man durch nochmalige Differentiation der Gleichung (1.) erkennt, die Gleichung

$$(3.)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(4)} = 0,$$

welche *vier* Werte von $\frac{dy}{dx}$ liefert. Der betrachtete Punkt ist dann ein „*vierfacher Punkt* der Kurve", denn es gibt in diesem Punkte *vier* Tangenten an die *vier* verschiedenen Zweige der Kurve, welche durch diesen Punkt hindurchgehen.

In dieser Weise kann man fortfahren und kommt schließlich zu dem folgenden Resultate:

Sind die n^{ten} partiellen Ableitungen von $F(x, y)$ die ersten, welche für die Koordinaten x, y des Kurvenpunktes P nicht sämtlich verschwinden, so findet man aus der Gleichung

$$(4.)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(n)} = 0$$

n Werte von $\frac{dy}{dx}$; denen n Tangenten in dem betrachteten Punkte an n verschiedene Zweige der Kurve entsprechen. Der Punkt P heißt dann ein „n-facher Punkt der Kurve".

Beispiel.

Es sei

$$(5.)\qquad F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - y(y^2 - 3x^2) = 0$$

die Gleichung der Kurve, dann wird

$$F(x, y) = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - y^3 + 3x^2y,$$

$$(6.)\qquad \begin{cases} F_1 = 6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4 + 6xy, \\ F_2 = 6x^4y + 12x^2y^3 + 6y^5 - 3y^2 + 3x^2, \end{cases}$$

$$(7.)\qquad \begin{cases} F_{11} = 30x^4 + 36x^2y^2 + 6y^4 + 6y, \\ F_{12} = 24x^3y + 24xy^3 + 6x, \\ F_{22} = 6x^4 + 36x^2y^2 + 30y^4 - 6y, \end{cases}$$

$$(8.)\quad \begin{cases} F_{111} = 120x^3 + 72xy^2, & F_{112} = 72x^2y + 24y^3 + 6, \\ F_{122} = 24x^3 + 72xy^2, & F_{222} = 72x^2y + 120y^3 - 6. \end{cases}$$

Für $x = 0$, $y = 0$ werden die Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0,$$
$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0$$

befriedigt, folglich ist der Nullpunkt ein dreifacher Punkt, in welchem man die Richtung der drei Tangenten aus Gleichung (2a.) findet, indem man

$$(8a.)\quad \begin{cases} F_{111} = 0, & F_{112} = 6, \\ F_{122} = 0, & F_{222} = -6 \end{cases}$$

einsetzt. Dies gibt

$$18\frac{dy}{dx} - 6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0,$$

Fig. 171.

oder, wenn man die drei Wurzeln dieser Gleichung mit $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$ bezeichnet,

$$(9.)\quad \operatorname{tg}\alpha_1 = 0, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = +\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha_3 = -\sqrt{3},$$

$$(10.)\quad \alpha_1 = 0^0, \quad \alpha_2 = 60^0, \quad \alpha_3 = 120^0.$$

(Vgl. Fig. 171.)

§ 162.

Spitzen oder Rückkehrpunkte.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 267.)

In Formel Nr. 265 der Tabelle, nämlich in der Gleichung

$$(1.)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}},$$

welche die Richtung der beiden Tangenten in einem Doppelpunkte lieferte, kann es vorkommen, daß

$$(2.)\quad F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22} = 0$$

wird, ohne daß die drei Gleichungen

$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Dann sind die beiden Werte von $\frac{dy}{dx}$ einander gleich, d. h. *die beiden Tangenten fallen in eine zusammen.* Durch den betrachteten Punkt gehen daher zwei Zweige der Kurve, die sich gegenseitig berühren. Hierbei werden im allgemeinen die beiden Kurvenzweige nur auf der einen Seite des betrachteten Punktes *reell* sein, während sie auf der anderen Seite *imaginär* werden. Man

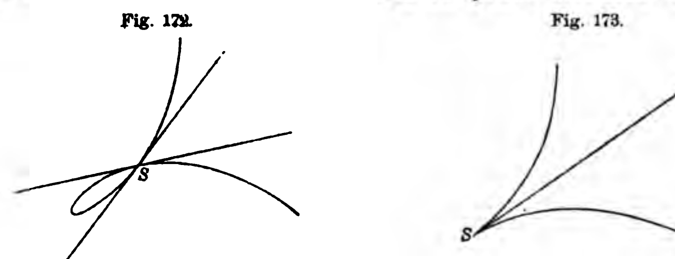


Fig. 172. Fig. 173.

kann sich diesen Fall aus dem allgemeinen so entstanden denken, daß sich eine Schleife immer weiter zusammenzieht und schließlich zu einem Punkte zusammenschrumpft. (Vgl. Fig. 172 und 173.)

Man kann sich aber diesen Fall auch durch die folgende Rechnung klar machen. Es sei z. B.

$$y = \varphi(x) \pm (x - a)\sqrt{\psi(x)}, \tag{3.}$$

wobei $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ rationale Funktionen sein mögen, die für $x = a$ nicht unendlich groß werden; dann ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \frac{2\psi(x) + (x - a)\psi'(x)}{2\sqrt{\psi(x)}}. \tag{4.}$$

Aus Gleichung (3.) findet man andererseits durch Fortschaffen des Wurzelzeichens

$$F(x, y) = [y - \varphi(x)]^2 - (x - a)^2\psi(x) = 0, \tag{5.}$$

$$\begin{cases} F_1(x, y) = -2[y - \varphi(x)]\varphi'(x) - 2(x - a)\psi(x) - (x - a)^2\psi'(x), \\ F_2(x, y) = +2[y - \varphi(x)], \end{cases} \tag{6.}$$

$$\begin{cases} F_{11} = +2\varphi'(x)^2 - 2[y - \varphi(x)]\varphi''(x) - 2\psi(x) \\ \qquad\qquad - 4(x - a)\psi'(x) - (x - a)^2\psi''(x), \\ F_{12} = -2\varphi'(x), \quad F_{22} = +2. \end{cases} \tag{7.}$$

Deshalb erhält man für $x = a$, $y = \varphi(a)$

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0; \tag{8.}$$

$$F_{11} = 2\varphi'(a)^2 - 2\psi(a), \quad F_{12} = -2\varphi'(a), \quad F_{22} = +2. \tag{9.}$$

Aus den Gleichungen (8.) folgt, daß der Punkt mit den Koordinaten $x = a$, $y = \varphi(a)$ ein Doppelpunkt ist, und aus den Gleichungen (9.) ergibt sich, daß für diesen Doppelpunkt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = \varphi'(a) \pm \sqrt{\psi(a)}. \tag{10.}$$

Dasselbe Resultat findet man noch leichter aus Gleichung (4.).

Wenn sich nun der Faktor $x - a$ noch einmal von der Funktion $\psi(x)$ absondern läßt, so daß für $x = a$

$$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 4\psi(a) = 0 \tag{11.}$$

wird, so fallen die beiden Tangenten im Doppelpunkte der Kurve in *eine* zusammen, und die Kurve selbst hat in dem Doppelpunkte eine Spitze, wenn $\psi(x)$ mit $x - a$ zugleich das Vorzeichen wechselt. Wird z. B.

$$\psi(x) > 0 \text{ für } x < a \quad \text{und} \quad \psi(x) < 0 \text{ für } x > a,$$

wobei (vom Vorzeichen abgesehen) nur hinreichend kleine Werte von $x - a$ in Betracht kommen sollen, so sind die beiden Werte von y und von $\frac{dy}{dx}$ nur dann reell, wenn $x \leqq a$ ist; sie werden imaginär, wenn $x > a$ ist. Wird dagegen

$$\psi(x) < 0 \text{ für } x < a \quad \text{und} \quad \psi(x) > 0 \text{ für } x > a,$$

so sind die beiden Werte von y und von $\frac{dy}{dx}$ nur dann reell, wenn $x \geqq a$ ist; sie werden imaginär für $x < a$.

Die beiden Kurvenzweige haben daher in dem Doppelpunkte dieselbe Tangente und endigen in diesem Punkte, so daß der eine Kurvenzweig als die Fortsetzung des anderen betrachtet werden muß. Ein solcher Punkt heißt demgemäß eine „*Spitze* oder ein *Rückkehrpunkt* der Kurve“, und die zugehörige Tangente heißt „*Rückkehrtangente*“.

Eine Spitze ist gewissermaßen der Übergang von einem eigentlichen Doppelpunkte zu einem isolierten Punkte, ebenso wie eine quadratische Gleichung mit zwei *gleichen* Wurzeln den Übergang bildet von einer quadratischen Gleichung mit zwei *reellen* Wurzeln zu einer mit zwei *imaginären* Wurzeln.

Beispiel 1. Das in § 159 gewählte Beispiel

$$F(x, y) = y^2 - (x - a)^2(x - b) = 0$$

liefert einen *eigentlichen Doppelpunkt*, wenn $a > b$, einen *isolierten Punkt*, wenn $a < b$, und eine *Spitze*, wenn $a = b$ ist. In der Tat, dann wird

$$F(x, y) = y^2 - (x - a)^3, \tag{12.}$$

$$F_1(x, y) = -3(x - a)^2, \quad F_2(x, y) = 2y, \tag{13.}$$

$$F_{11} = -6(x - a), \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 2, \tag{14.}$$

folglich ist für $x = a$, $y = 0$

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0 \tag{15.}$$

und

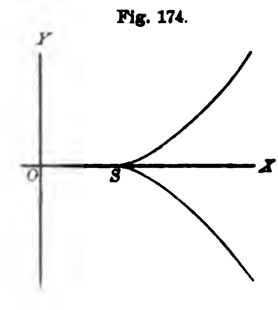
$$F_{12}{}^2 - F_{11}F_{22} = 0. \tag{16.}$$

Hier kann die Gleichung der Kurve auch in der Form

$$y = \pm (x - a)\sqrt{x - a} \tag{17.}$$

geschrieben werden; dies gibt dann

Fig. 174.



$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2}\sqrt{x - a}, \tag{18.}$$

und man erkennt, daß y nur reell ist, wenn $x \geqq a$, und daß für $x = a$ die beiden Tangenten der Kurve mit der X-Achse zusammenfallen. Der Punkt S mit den Koordinaten $x = a$, $y = 0$ ist daher eine Spitze der Kurve. (Vgl. Fig. 174.)

Beispiel 2. Nach den Gleichungen (36.) in § 100 hat die *Kardioide* die Gleichung

$$r = a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right), \tag{19.}$$

oder (vgl. Gl. (36a.) auf Seite 501.)

(20.) $F(x, y) = 4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 - 4ax^3 - 4axy^2 - a^2y^2 = 0.$

Man kann jetzt zeigen, daß diese Kurve im Nullpunkte einen Rückkehrpunkt (eine Spitze) hat, und daß die zugehörige Rückkehrtangente mit der X-Achse zusammenfällt. (Vgl. Fig. 175.)

Fig. 175.

In der Tat, hier wird

(21.) $F_1(x, y) = 16x^3 + 16xy^2 - 12ax^2 - 4ay^2,$

(22.) $F_2(x, y) = 16x^2y + 16y^3 - 8axy - 2a^2y,$

(23.) $F_{11}(x, y) = 48x^2 + 16y^2 - 24ax,$

(24.) $F_{12}(x, y) = 32xy - 8ay,$

(25.) $F_{22}(x, y) = 16x^2 + 48y^2 - 8ax - 2a^2.$

Für $x = 0$, $y = 0$ erhält man daher

(26.) $F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0, \quad F_{11}(x, y) = 0, \quad F_{12}(x, y) = 0,$
$$F_{22}(x, y) = -2a^2,$$

also

(27.) $F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0, \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_{12}}{F_{22}} = 0, \quad$ also $\quad \alpha = 0;$

d. h. der Nullpunkt ist eine Spitze der Kurve, und die Tangente in diesem Punkte fällt mit der X-Achse zusammen.

Beispiel 3. Die Hypozykloide mit den Gleichungen

(28.) $x = a[2\cos t + \cos(2t)],$
$\quad\;\; y = a[2\sin t - \sin(2t)],$

welche auch „die *Steiner*sche Kurve" genannt wird, hat drei Spitzen, wie schon aus der Erzeugungsweise unmittelbar hervorgeht. (Vgl. Fig. 176.)

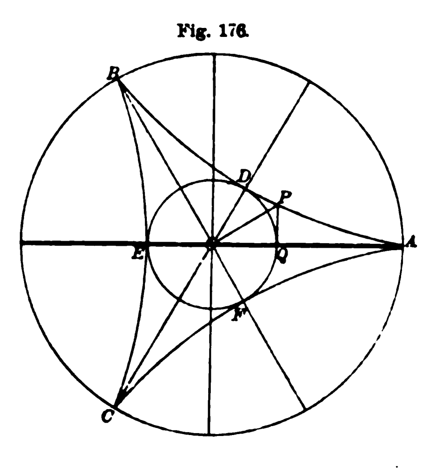


Fig. 176.

Die Koordinaten der Spitzen sind



$$x_1 = 3a, \qquad y_1 = 0,$$
$$x_2 = -\frac{3a}{2}, \qquad y_2 = +\frac{3a}{2}\sqrt{3},$$
$$x_3 = -\frac{3a}{2}, \qquad y_3 = -\frac{3a}{2}\sqrt{3}.$$

Man kann dies durch die vorstehend entwickelten Methoden bestätigen. Eliminiert man nämlich t aus den Gleichungen (28.), so erhält man

$$F(x, y) = y^4 + 2y^2(x^2 + 12ax + 9a^2) + (x + a)(x - 3a)^3 = 0. \tag{29.}$$

Daraus folgt

$$F_1(x, y) = 2y^2(2x + 12a) + 4x(x - 3a)^2, \tag{30.}$$

$$F_2(x, y) = 4y^3 + 4y(x^2 + 12ax + 9a^2), \tag{31.}$$

$$F_{11} = 4y^2 + 12(x - a)(x - 3a), \quad F_{12} = 8y(x + 6a), \tag{32.}$$
$$F_{22} = 12y^2 + 4(x^2 + 12ax + 9a^2).$$

Für $x = 3a$, $y = 0$ wird

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0, \\ F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 216a^2, \quad \text{also} \quad F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0. \end{cases} \tag{33.}$$

Dabei fällt die Rückkehrtangente mit der X-Achse zusammen, weil

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_{12}}{F_{22}} = 0 \tag{34.}$$

wird.

Für
$$x = -\frac{3a}{2}, \quad y^2 = \frac{27a^2}{4}$$

wird nach den Gleichungen (29.) bis (32.)

$$F(x, y) = \frac{729a^4}{16} + \frac{27a^2}{2}\left(\frac{9a^2}{4} - 18a^2 + 9a^2\right) - \frac{a}{2}\left(-\frac{9a}{2}\right)^3 = 0,$$

$$F_1(x, y) = \frac{27a^2}{2} \cdot 9a - 6a\left(-\frac{9a}{2}\right)^2 = \left(\frac{243}{2} - \frac{243}{2}\right)a^3 = 0,$$

$$F_2(x, y) = 4y\left[\frac{27a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} - 9a^2\right] = 0,$$

$$F_{11}(x, y) = 27a^2 + 3(-9a)(-5a) = 162a^2,$$

$$F_{12}(x, y) = 8y \cdot \frac{9a}{2} = 36ay,$$

$$F_{22}(x, y) = 81a^2 + 9a^2 - 72a^2 + 36a^2 = 54a^2,$$

also

$$F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 1296a^2y^2 - 27 \,.\, 324a^4 = 0.$$

Deshalb sind die Punkte B und C mit den Koordinaten

$$x_2 = -\frac{3a}{2}, \; y_2 = +\frac{3a}{2}\sqrt{3} \text{ und } x_3 = -\frac{3a}{2}, \; y_3 = -\frac{3a}{2}\sqrt{3}$$

Spitzen; und für die Richtung der Rückkehrtangenten findet man

(35.) $$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{F_{12}}{F_{22}} = -\frac{36ay}{54a^2} = \mp\sqrt{3},$$

also

(36.) $$\operatorname{tg}\alpha_2 = -\sqrt{3}, \; \alpha_2 = 120^0; \; \operatorname{tg}\alpha_3 = +\sqrt{3}, \; \alpha_3 = -120^0.$$

Andere Beispiele für das Auftreten von Spitzen liefern die anderen *Epizykloiden* und *Hypozykloiden*, insbesondere die *Astroide*; ferner die *Evoluten* oder *Krümmungsmittelpunkts-Kurven*.

Gewöhnlich wird von den beiden Zweigen einer Kurve, welche in einer Spitze zusammentreffen, der eine nach oben *konkav* und der andere nach oben *konvex* sein, so daß die gemeinsame Tangente *zwischen* beiden liegt, wie bei den vorstehenden Aufgaben, sowie bei der Evolute der Parabel (Fig. 113 auf S. 474), der Ellipse (Fig. 114, 115 und 116 auf S. 475 und 476) und der Hyperbel (Fig. 117 auf S. 477). Diese Spitzen nennt man „*Spitzen erster Art*“. Es können aber auch die beiden Zweige, welche in einer Spitze zusammentreffen, auf *derselben* Seite der gemeinsamen Tangente liegen. Es sei z. B.

(37.) $$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

oder

(38.) $$F(x, y) = y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0.$$

Hier wird

(39.) $$F_1(x, y) = -4xy + 4x^3 - 5x^4, \quad F_2(x, y) = 2y - 2x^2,$$

(40.) $$F_{11} = -4y + 12x^2 - 20x^3, \quad F_{12} = -4x, \; F_{22} = 2.$$

Für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden $F(x, y)$, $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, folglich ist der Nullpunkt ein *Doppelpunkt*. Dabei wird

(41.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}} = 0,$$

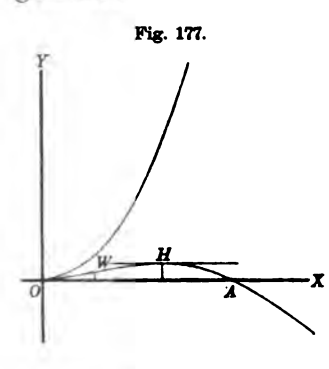
d. h. die Tangenten an die beiden Kurvenzweige in diesem Doppelpunkte fallen mit der X-Achse zusammen. Deshalb hat die Kurve in diesem Doppelpunkte eine *Spitze.* Daß der Nullpunkt wirklich eine Spitze ist, erkennt man aus Gleichung (37.), weil y imaginär ist, sobald x negativ wird.

Ferner folgt aus Gleichung (37.)

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4} \sqrt{x}. \tag{42.}$$

Das doppelte Vorzeichen in den Gleichungen (37.) und (42.) entspricht dem Umstande, daß jedem Werte von x *zwei* Werte von y, also auch *zwei* Punkte der Kurve zugeordnet sind.

Fig. 177.



Im Nullpunkte fallen diese beiden Punkte zusammen und gleichzeitig auch die beiden Tangenten. Solange $x < 1$ ist, liegen auch *beide* Zweige der Kurve über dieser gemeinsamen Tangente, nämlich über der X-Achse, weil *beide* Werte von y positiv sind. Für kleine Werte von x, nämlich für $x < \frac{64}{225}$, werden sogar *beide* Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ *positiv,* deshalb sind beide Zweige der Kurve in der Nähe der Spitze nach oben *konkav*; erst für

$$x = \frac{64}{225} \quad \text{wird} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{15}{4}\sqrt{x} = 0,$$

d. h. der untere Kurvenzweig hat in dem zugehörigen Punkte einen *Wendepunkt* W, in dem er sich von der Konkavität zur Konvexität wendet.

Eine solche Spitze nennt man eine *„Spitze zweiter Art“* oder *„Schnabel-Spitze“.* (Vgl. Fig. 177.)

XXI. Abschnitt.

Herleitung der *Taylor*schen Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen. Homogene Funktionen.

§ 163.

Die *Taylor*sche Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 268.)

Es sei

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

eine Funktion von zwei Veränderlichen, dann kann man $f(x + h, y + k)$ in ähnlicher Weise nach Potenzen von h und k entwickeln, wie früher (§ 36 und 38) $f(x + h)$ nach Potenzen von h entwickelt wurde.

Man findet diese Entwickelung sehr leicht, indem man zunächst

$$ht \quad \text{statt} \quad h, \qquad kt \quad \text{statt} \quad k$$

schreibt und $f(x + ht, y + kt)$ nach steigenden Potenzen von t entwickelt. Dies geschieht nach der *Mac-Laurin*schen *Reihe* in folgender Weise. Man setze

$$x + ht = u, \quad x + kt = v, \quad f(u, v) = F(t), \tag{2.}$$

dann wird nach Formel Nr. 92 der Tabelle, wenn man f mit F und x mit t vertauscht,

$$F(t) = F(0) + \frac{t}{1!}F'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + R. \tag{3.}$$

Bei der Bildung von $F'(t)$, $F''(t), \ldots$ muß man beachten, daß für diese Rechnung t die *einzige Veränderliche* ist, während x, y, h, k *konstant* bleiben, daß also

$$(4.)\qquad \frac{du}{dt} = h, \quad \frac{dv}{dt} = k$$

wird. Dadurch erhält man nach Formel Nr. 236 der Tabelle

$$(5.)\quad \begin{cases} F(t) = f(u, v), \\ F'(t) = \dfrac{df(u, v)}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k, \\ F''(t) = \dfrac{d^2 f(u, v)}{dt^2} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k\right)^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^{(n)}(t) = \dfrac{d^n f(u, v)}{dt^n} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}h + \dfrac{\partial f}{\partial v}k\right)^{(n)}. \end{cases}$$

Die Formel Nr. 236 der Tabelle ist hier anwendbar, weil u und v *lineare* Funktionen von t sind. Für $t = 0$ wird

$$(6.)\quad u = x, \; v = y, \; \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \; \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Die Gleichungen (6.) ergeben sich auch daraus, daß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

ist; denn deshalb wird für beliebige Werte von t

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}.$$

Ähnliches gilt für die höheren Ableitungen. Daraus folgt

$$(7.)\quad \begin{cases} F(0) = f(x, y), \\ F'(0) = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}k, \\ F''(0) = \left(\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F^{(n)}(0) = \left(\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(n)}, \\ F^{(n+1)}(\Theta t) = \\ \quad \left(\dfrac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial x}h + \dfrac{\partial f(x+\Theta ht, y+\Theta kt)}{\partial y}k\right)^{(n+1)}. \end{cases}$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (3.) ein, so erhält man

(8.)
$$F(t) = f(x + ht,\ y + kt) =$$
$$f(x, y) + \frac{t}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)} + \cdots$$
$$+ \frac{t^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R,$$

wobei

(9.)
$$R = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\Theta t) =$$
$$\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta ht,\ y+\Theta kt)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta ht,\ y+\Theta kt)}{\partial y}k\right)^{(n+1)},$$

oder, wenn man die zweite Form des Restes anwendet,

(10.)
$$R = \frac{t^n}{n!}\left[F^{(n)}(\Theta_1 t) - F^{(n)}(0)\right]$$
$$= \frac{t^n}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 ht,\ y+\Theta_1 kt)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 ht,\ y+\Theta_1 kt)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].$$

Setzt man schließlich t gleich 1, so geht Gleichung (8.) über in

(8a.)
$$f(x+h,\ y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R,$$

wobei

(9a.)
$$R =$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta h,\ y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h,\ y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(n+1)},$$

oder

(10a.)
$$R = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 h,\ y+\Theta_1 k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 h,\ y+\Theta_1 k)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].$$

In den vorstehenden Gleichungen ist wieder von der *symbolischen* Bezeichnungsweise Gebrauch gemacht, nach welcher z. B.

$$(11.)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$
$$= f_{11}(x, y)h^2 + 2f_{12}(x, y)hk + f_{22}(x, y)k^2$$

wird. Die Größe Θ liegt dabei immer zwischen 0 und $+1$.

Diese Art der Entwickelung läßt sich ohne weiteres auf Funktionen von drei oder von mehr Veränderlichen übertragen. So ist z. B.

$$(12.)\quad f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(2)} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l\right)^{(n)} + R.$$

Aus der *Taylor*schen Reihe für Funktionen von mehreren Veränderlichen läßt sich dann auch die *Mac-Laurin*sche Reihe herleiten. So braucht man z. B. bei Funktionen von *drei* Veränderlichen nur

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

zu setzen und dann

$$x \text{ statt } h, \quad y \text{ statt } k, \quad z \text{ statt } l$$

zu schreiben, um die Funktion nach steigenden Potenzen von x, y und z zu entwickeln.

§ 164.

Homogene Funktionen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 269.)

Erklärung. *Eine Funktion*

$$(1.)\quad z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

von n *Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *heißt eine „homogene Funktion* m^{ten} *Grades", wenn sie sich durch Multiplikation der sämtlichen Veränderlichen mit ein und demselben Faktor*

t in sich selbst verwandelt, multipliziert mit der m^{ten} Potenz dieses Faktors.

Eine *homogene* Funktion m^{ten} Grades wird daher erklärt durch die Gleichung

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n). \tag{2.}$$

So ist z. B.

$$f(x, y, z) = x^3 - 2x^2y - 4yz^2 - 7xyz$$

eine homogene Funktion *dritten* Grades von x, y, z;

$$f(x, y, z) = x^2 + 3xy + \frac{z^3}{x} - \frac{3x^4 + z^4}{y^2}$$

und

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4} - \frac{3xyz}{\sqrt{x^2 - z^2}}$$

sind homogene Funktionen *zweiten* Grades von x, y, z;

$$f(x, y, z) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y + z}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{z + x}{\sqrt{z^2 + x^2}}$$

ist eine homogene Funktion *nullten* Grades von x, y, z.

Satz 1. *Dividiert man eine homogene Funktion m^{ten} Grades durch die m^{te} Potenz einer ihrer Veränderlichen, z. B. durch x_n^m, so wird der Quotient nur von den $n-1$ Verhältnissen der übrigen Veränderlichen zu dieser einen abhängen,* d. h. der Quotient ist nur noch eine Funktion von $n-1$ Veränderlichen

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_{n-1}, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n);$$

setzt man in dieser Gleichung $t = \frac{1}{x_n}$, so erhält man

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)}{x_n^m} = f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right). \tag{3.}$$

Satz 2. *Aus einer nicht homogenen Funktion von $n-1$ Veränderlichen $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$ kann man eine homogene Funktion m^{ten} Grades von n Veränderlichen machen, indem man*

$$u_1 = \frac{x_1}{x_n},\ u_2 = \frac{x_2}{x_n}, \ldots u_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

setzt und die Funktion mit x_n^m multipliziert. Dabei ist der Exponent m noch ganz beliebig.

Beweis. Vertauscht man in

$$x_n^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{4.}$$

x_1 mit tx_1, x_2 mit $tx_2, \ldots x_n$ mit tx_n, so geht Gleichung (4.) über in

$$t^m x_n^m \varphi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) = f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n),$$

folglich wird

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ist $\varphi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$ eine ganze rationale Funktion, so verfügt man über die beliebige Zahl m gewöhnlich so, daß auch die homogene Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine ganze rationale Funktion wird.

Man kann diesen Satz benutzen, um Gleichungen zwischen x, y oder zwischen x, y, z homogen zu machen, wodurch ihre Behandlung für viele Zwecke bequemer wird. Ist z. B. die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{5.}$$

gegeben, so setze man

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3}$$

und multipliziere mit x_3^2. Dadurch erhält man eine *homogene* Gleichung zweiten Grades mit drei Veränderlichen x_1, x_2, x_3, nämlich

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \tag{6.}$$

Indem man

$$x_3 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x,\ x_2 = y$$

setzt, kann man dann jederzeit von den homogenen Gleichungen zu den nicht homogenen zurückkehren.

Satz 3. *Die ersten partiellen Ableitungen einer homogenen Funktion m^{ten} Grades sind sämtlich homogene Funktionen $(m-1)^{ten}$ Grades.*

Beweis. Bezeichnet man, wie gewöhnlich,

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} \quad \text{mit} \quad f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

und setzt

$$tx_1 = u_1, \; tx_2 = u_2, \ldots tx_n = u_n, \tag{7.}$$

so folgt aus der Voraussetzung, nämlich aus der Gleichung

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$f(u_1, u_2, \ldots u_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{8.}$$

durch partielle Differentiation nach x_α

$$f_\alpha(u_1, u_2, \ldots u_n) \,.\, t = t^m f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

oder

$$f_\alpha(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^{m-1} f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n), \tag{9.}$$

d. h. $f_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist eine homogene Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, wobei α die Werte $1, 2, \ldots n$ haben darf.

In derselben Weise kann man zeigen, daß jede zweite partielle Ableitung von einer homogenen Funktion m^{ten} Grades eine homogene Funktion $(m-2)^{\text{ten}}$ Grades, allgemein, daß jede partielle Ableitung r^{ten} Grades eine homogene Funktion $(m-r)^{\text{ten}}$ Grades ist.

Differentiiert man Gleichung (8.), indem man t als die einzige Veränderliche ansieht, so erhält man nach Formel Nr. 236 der Tabelle

$$\begin{aligned} &f_1(u_1, u_2, \ldots u_n) \,.\, x_1 + f_2(u_1, u_2, \ldots u_n) \,.\, x_2 + \cdots \\ &+ f_n(u_1, u_2, \ldots u_n) \,.\, x_n = mt^{m-1} f(x_1, x_2, \ldots x_n), \end{aligned}$$

oder für $t = 1$

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \,.\, x_1 + f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \,.\, x_2 + \cdots \\ &+ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \,.\, x_n = mf(x_1, x_2, \ldots x_n). \end{aligned}$$

Dies kann man noch einfacher schreiben, indem man

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = z$$

setzt; dann erhält man nämlich

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = mz. \tag{10.}$$

Beispiel.

Es sei

$$z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2, \tag{11.}$$

und

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32},$$

dann findet man

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= 2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3), \\ \frac{\partial z}{\partial x_3} &= 2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3); \end{aligned}\right. \tag{12.}$$

$$\begin{aligned} x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial z}{\partial x_3} &= 2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) \\ &+ 2x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ &+ 2x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\ &= 2z. \end{aligned} \tag{13.}$$

Wenn man beachtet, daß $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ wieder homogene Funktionen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, so folgt aus Gleichung (10.), indem man z mit $\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}$ und m mit $m-1$ vertauscht, für $\alpha = 1, 2, \ldots n$

$$x_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + x_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} = (m-1)\frac{\partial z}{\partial x_1},$$

$$x_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \cdots + x_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} = (m-1)\frac{\partial z}{\partial x_2},$$

. . . .

$$x_1\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} + x_2\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} + \cdots + x_n\frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = (m-1)\frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen bezw. mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und addiert sie, so erhält man unter Anwendung der symbolischen Bezeichnungsweise und mit Rücksicht auf Gleichung (10.)

$$\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(2)} = m(m-1)z. \tag{14.}$$

In dieser Weise kann man fortfahren und findet

(15.) $$\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(r)}=m(m-1)\ldots(m-r+1)z.$$

Durch diese Formeln kann man die Gleichung der Tangente einer ebenen Kurve und die Gleichung der Tangentialebene einer Fläche vereinfachen.

Es sei z. B.

(16.) $$y=f(x),\quad\text{oder}\quad F(x,y)=0$$

die Gleichung einer Kurve n^{ten} Grades, so erhält man nach Formel Nr. 144 der Tabelle für die Tangente die Gleichung

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x),$$

oder

(17.) $$F_1(x,y)(x'-x)+F_2(x,y)(y'-y)=0.$$

Macht man jetzt aber die Gleichung (16.) homogen, indem man

(18.) $$x=\frac{x_1}{x_3},\quad y=\frac{x_2}{x_3}$$

setzt und mit $x_3{}^n$ multipliziert, so wird

(19.) $$x_3{}^nF\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)=G(x_1,x_2,x_3)=0.$$

Daraus erhält man durch partielle Differentiation nach x_1 und x_2

$$x_3{}^{n-1}F_1\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)=G_1(x_1,x_2,x_3),$$

$$x_3{}^{n-1}F_2\left(\frac{x_1}{x_3},\frac{x_2}{x_3}\right)=G_2(x_1,x_2,x_3).$$

Deshalb geht Gleichung (17.), wenn man sie mit $x_3{}^n$ multipliziert und

$$x'=\frac{x_1'}{x_3},\quad y'=\frac{x_2'}{x_3}$$

setzt, über in

(20.) $$G_1(x'_1-x_1)+G_2(x'_2-x_2)=0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (10.)

(21.) $$G_1x_1+G_2x_2+G_3x_3=nG(x_1,x_2,x_3)=0,$$

folglich erhält man durch Addition der Gleichungen (20.) und (21.) für die Tangente die Gleichung

$$G_1x'_1 + G_2x'_2 + G_3x_3 = 0. \tag{22.}$$

Indem man zum Schlusse

$$x_3 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x,\ x_2 = y,\ x'_1 = x',\ x'_2 = y'$$

setzt, gehen

$$G(x_1,\ x_2,\ x_3), \quad G_1, \quad G_2$$

bezw. in

$$F(x,\ y), \qquad F_1, \quad F_2$$

über. Diese Form für die Gleichung der Tangente ist einfacher als die bisher benutzte, denn die Gleichung (17.) ist in bezug auf x und y vom n^{ten} Grade, während die Gleichung (22.) nur vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Beispiel.

Macht man die Gleichung der Ellipse homogen, so erhält man

$$G(x_1,\ x_2,\ x_3) = b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2x_3^2 = 0, \tag{23.}$$

folglich wird

$$G_1 = 2b^2x_1, \quad G_2 = 2a^2x_2, \quad G_3 = -2a^2b^2x_3, \tag{24.}$$

so daß man für die Tangente die Gleichung

$$b^2x_1x'_1 + a^2x_2x'_2 - a^2b^2x_3^2 = 0 \tag{25.}$$

findet, die für $x_3 = 1$ in

$$b^2xx' + a^2yy' - a^2b^2 = 0 \tag{25a.}$$

übergeht.

Man erkennt, daß das hier allgemein erläuterte Verfahren bei den in § 89 behandelten Aufgaben bereits Anwendung gefunden hat.

Ist

$$F(x,\ y,\ z) = 0 \tag{26.}$$

die Gleichung einer Fläche n^{ten} Grades, so hat nach Formel Nr. 254 die Tangentialebene im Flächenpunkte P die Gleichung

$$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0. \tag{27.}$$

Macht man Gleichung (26.) homogen, indem man

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

setzt und mit x_4^n multipliziert, so erhält man

$$(26\text{a.}) \qquad x_4^n F\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Daraus ergibt sich durch partielle Differentiation nach x_1, x_2 und x_3

$$x_4^{n-1} F_1\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G_1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$x_4^{n-1} F_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G_2(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$x_4^{n-1} F_3\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = G_3(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Deshalb geht Gleichung (27.), wenn man noch

$$x' = \frac{x'_1}{x_4}, \quad y' = \frac{x'_2}{x_4}, \quad z' = \frac{x'_3}{x_4}$$

setzt, über in

$$(27\text{a.}) \quad G_1(x'_1 - x_1) + G_2(x'_2 - x_2) + G_3(x'_3 - x_3) = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (10.)

$$(28.) \quad G_1 x_1 + G_2 x_2 + G_3 x_3 + G_4 x_4 = nG(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

folglich erhält man durch Addition der Gleichungen (27a.) und (28.) für die Tangentialebene die Gleichung

$$(29.) \qquad G_1 x'_1 + G_2 x'_2 + G_3 x'_3 + G_4 x_4 = 0.$$

Indem man zum Schlusse

$$x_4 = 1, \quad \text{also} \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z,$$
$$x'_1 = x', \quad x'_2 = y', \quad x'_3 = z'$$

setzt, gehen

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad G_1, G_2, G_3$$

bezw. in

$$F(x, y, z), \qquad F_1, F_2, F_3$$

über. Diese Form für die Gleichung der Tangentialebene ist einfacher als die bisher benutzte, denn Gleichung (27.) ist in bezug auf x, y, z vom n^{ten} Grade, während Gleichung (29.) nur noch vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Beispiel.

Macht man die Gleichung des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

homogen, so erhält man

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{x_2{}^2}{b^2} + \frac{x_3{}^2}{c^2} - x_4{}^2 = 0, \tag{30.}$$

folglich wird

$$G_1 = \frac{2x_1}{a^2}, \quad G_2 = \frac{2x_2}{b^2}, \quad G_3 = \frac{2x_3}{c^2}, \quad G_4 = -2x_4, \tag{31.}$$

so daß man für die Tangentialebene die Gleichung

$$\frac{x_1x'_1}{a^2} + \frac{x_2x'_2}{b^2} + \frac{x_3x'_3}{c^2} - x_4{}^2 = 0 \tag{32.}$$

findet, die für $x_4 = 1$ in

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1 = 0 \tag{32a.}$$

übergeht.

Man erkennt, daß auch diese Vereinfachung bereits in § 153 zur Anwendung gekommen ist.

XXII. Abschnitt.

Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen.

§ 165.

Maxima und Minima der Funktionen von zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 270.)

Es sei

$$(1.)\qquad z = f(x, y)$$

eine stetige Funktion der beiden voneinander unabhängigen Veränderlichen x und y; man nennt dann z ein *Maximum*, wenn

$$f(x, y) > f(x + h, y + k)$$

wird für hinreichend kleine, im übrigen aber beliebige, *positive oder negative* Werte von h und k. Dagegen nennt man z ein *Minimum*, wenn für die angegebenen Werte von h und k

$$f(x, y) < f(x + h, y + k)$$

wird. Um die Werte von x und y zu bestimmen, für welche z ein Maximum oder ein Minimum wird, muß man also untersuchen, für welche Werte von x und y die Differenz

$$(2.)\qquad \Delta = f(x + h, y + k) - f(x, y)$$

beständig negativ, bezw. *beständig positiv* ist.

Zu diesem Zwecke entwickelt man Δ mit Hilfe des *Taylor*schen Lehrsatzes nach steigenden Potenzen von h und k, wobei vorausgesetzt wird, daß $f(x, y)$ und die vorkom-

menden Ableitungen davon für die betrachteten Werte von x und y *stetig* und *endlich* sind. Dann erhält man nach Formel Nr. 268 der Tabelle

$$f(x+h,\ y+k) = f(x,\ y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + R; \tag{3.}$$

dabei ist, wenn man die zweite Form des Restes anwendet und bei Θ den Index 1 fortläßt,

$$\begin{aligned} R = {} & [f_1(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_1(x,\ y)]h \\ & + [f_2(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_2(x,\ y)]k. \end{aligned} \tag{4.}$$

Da die Stetigkeit der Funktionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ vorausgesetzt wird, so kann man die absoluten Beträge der Differenzen

$$f_1(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_1(x,\ y) = \alpha_1$$

und

$$f_2(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_2(x,\ y) = \alpha_2$$

für hinreichend kleine Werte von h und k so klein machen, als man nur will, z. B. kleiner als die beliebig kleine Größe α. Wäre jetzt $\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} = f_1(x, y)$ von Null verschieden, so könnte man $k = 0$ und h so klein machen, daß

$$\alpha < |f_1(x,\ y)|$$

wird. Da nun aber

$$R = [f_1(x+\Theta h,\ y) - f_1(x,\ y)]h = \alpha_1 h \tag{5.}$$

wird, wobei α_1 seinem absoluten Betrage nach noch kleiner ist als α, so hat

$$\varDelta = f_1(x,\ y)h + R = h[f_1(x,\ y) + \alpha_1] \tag{6.}$$

dasselbe Vorzeichen wie $f_1(x, y)h$. Deshalb wechselt $\varDelta$ mit h zugleich das Zeichen, ist also weder *beständig negativ*, noch *beständig positiv*. Daraus folgt, daß $f(x, y)$ nur dann ein Maximum oder ein Minimum werden kann, wenn

$$f_1(x,\ y) = 0 \tag{7.}$$

ist. Die Notwendigkeit dieser Bedingung erkennt man schon daraus, daß $f(x, y)$ ein Maximum bezw. ein Minimum bleiben muß, wenn man y als *unveränderlich*, also x als die *einzige Veränderliche* betrachtet. Wie nun $f(x)$ nur für Werte von x ein Maximum oder ein Minimum werden

konnte, für welche $f'(x) = 0$ wurde (vgl. Formel Nr. 128 der Tabelle), so kann hier $f(x, y)$ nur für Werte von x und y ein Maximum oder ein Minimum werden, für welche die Gleichung (7.) befriedigt ist.

Ebenso kann man jetzt aber auch zeigen, daß

$$f_2(x, y) = 0 \tag{8.}$$

sein muß. Aus den Gleichungen (7.) und (8.) findet man dann die Werte von x und y, für welche *möglicherweise* ein Maximum oder ein Minimum von $f(x, y)$ eintritt.

Ob für die so gefundenen Wertepaare von x und y *wirklich* ein Maximum oder ein Minimum eintritt, darüber entscheidet in vielen Fällen schon der Charakter der Aufgabe, wie das folgende Beispiel zeigen möge.

Aufgabe. In der Ebene seien beliebig viele Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ mit den Koordinaten $x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots x_n, y_n$ gegeben; ihre Massen seien bezw. $M_1, M_2, \ldots M_n$; man soll die Koordinaten eines Punktes P finden, so daß die Summe

$$M_1 \cdot \overline{PP_1}^2 + M_2 \cdot \overline{PP_2}^2 + \cdots + M_n \cdot \overline{PP_n}^2$$

ein Minimum wird.

Auflösung. Hier ist die Funktion, welche ein Minimum werden soll,

$$f(x, y) = M_1[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] + M_2[(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2] + \cdots + M_n[(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2], \tag{9.}$$

also

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 2M_1(x - x_1) + 2M_2(x - x_2) + \cdots + 2M_n(x - x_n), \\ f_2(x, y) = 2M_1(y - y_1) + 2M_2(y - y_2) + \cdots + 2M_n(y - y_n). \end{cases} \tag{10.}$$

Indem man

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad f_2(x, y) = 0$$

setzt, findet man

$$\begin{cases} x = \dfrac{M_1x_1 + M_2x_2 + \cdots + M_nx_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}, \\ y = \dfrac{M_1y_1 + M_2y_2 + \cdots + M_ny_n}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}. \end{cases} \tag{11.}$$

Da bei dieser Aufgabe sicher ein Punkt vorhanden ist, welcher die Eigenschaft des Minimums besitzt, und da

man nur ein einziges Wertepaar von x und y findet, für welches die beiden notwendigen Bedingungen erfüllt sind, so muß dieses Wertepaar das Minimum liefern.

So einfach ist aber die Entscheidung im allgemeinen nicht. Es ist vielmehr bei der Untersuchung besondere Vorsicht erforderlich, denn, wenn man auch von den Ausnahmefällen ganz absieht, so kann man zeigen, daß in der Hälfte aller gewöhnlichen Fälle weder ein Maximum noch ein Minimum eintritt, obgleich die Bedingungen

$$f_1(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad f_2(x, y) = 0$$

erfüllt sind.

Es gelten dabei die folgenden Regeln:

Sind die Bedingungsgleichungen (7.) und (8.) befriedigt, so findet man durch die Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe

$$\Delta = \frac{1}{2!}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2) + R, \tag{12.}$$

wobei nach Formel Nr. 268 der Tabelle, wenn man $n = 2$ setzt und wieder die zweite Form des Restes anwendet,

$$R = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(2)} - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(2)}\right],$$

also

$$\begin{aligned} 2R = & \;[f_{11}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{11}(x, y)]h^2 \\ & + 2[f_{12}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{12}(x, y)]hk \\ & + \;[f_{22}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{22}(x, y)]k^2 \end{aligned} \tag{13.}$$

ist. Hätte man die *erste* Form des Restes benutzt, so müßte man für die folgenden Untersuchungen die Stetigkeit der *dritten* partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ voraussetzen, während man bei der Anwendung der *zweiten* Form nur die Stetigkeit der *zweiten* partiellen Ableitungen $f_{11}(x, y)$, $f_{12}(x, y)$, $f_{22}(x, y)$ vorauszusetzen braucht. Man kann dann die absoluten Beträge der Differenzen

$$f_{11}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{11}(x, y) = \beta_1,$$
$$f_{12}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{12}(x, y) = \beta_2,$$
$$f_{22}(x+\Theta h, y+\Theta k) - f_{22}(x, y) = \beta_3$$

für hinreichend kleine Werte von h und k so klein machen, wie man nur will, z. B. kleiner als die beliebig kleine Größe β. Dann wird

$$(14.)\qquad 2|R| < \beta(h^2 + 2|hk| + k^2) = \beta(|h| + |k|)^2.$$

Setzt man jetzt

$$(15.)\qquad f_{11}(x, y)h^2 + 2f_{12}(x, y)hk + f_{22}(x, y)k^2 = \varphi(h, k),$$

so heißt diese homogene Funktion zweiten Grades „eine *definite Form*", wenn sie für alle Werte von h und k, von denen wenigstens der eine von Null verschieden sein muß, entweder *beständig positiv* oder *beständig negativ* ist. Es soll nun durch die folgenden Untersuchungen gezeigt werden, daß Δ für hinreichend kleine Werte von h und k mit $\varphi(h, k)$ gleiches Vorzeichen hat, wenn diese Funktion eine definite Form ist, daß also $f(x, y)$ für die gefundenen Werte von x und y ein *Minimum* wird, wenn $\varphi(h, k)$ *beständig positiv* ist, und daß $f(x, y)$ ein *Maximum* wird, wenn $\varphi(h, k)$ *beständig negativ* ist.

Setzt man zunächst $k = 0$, so wird

$$\varphi(h, k) = f_{11}h^2;$$

daraus erkennt man, daß $\varphi(h, k)$ nur dann beständig positiv sein kann, wenn

$$(16.)\qquad f_{11} > 0$$

ist. Diese Bedingung ist *notwendig*, aber noch nicht *hinreichend*. Um auch die weiteren Bedingungen zu finden, unter denen $\varphi(h, k)$ eine *definite Form* ist, bilde man unter der Voraussetzung, daß $f_{11} \gtrless 0$ ist,

$$\varphi(h, k) . f_{11} = f_{11}^2h^2 + 2f_{11}f_{12}hk + f_{12}^2k^2 + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)k^2;$$

dies gibt

$$(17.)\qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}}[(f_{11}h + f_{12}k)^2 + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)k^2].$$

Damit der Ausdruck in der eckigen Klammer *beständig* positiv ist, muß er auch noch positiv bleiben, wenn man

$$f_{11}h + f_{12}k = 0, \quad \text{also} \quad h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}}$$

setzt. Dies geschieht nur, wenn

$$(18.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

ist. Diese beiden Bedingungen (16.) und (18.) sind *notwendig*, sie sind aber auch *hinreichend*; denn, wie man auch h und k bestimmen mag, $\varphi(h, k)$ ist dann *immer positiv*, solange h und k nicht beide gleich 0 sind.

Aus den beiden Ungleichungen

$$f_{11} > 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

folgt noch

$$f_{11}f_{22} > f_{12}^2 > 0, \quad \text{also} \quad f_{22} > 0.$$

Ist $f_{22} \gtrless 0$, so kann man in ähnlicher Weise wie bei der Herstellung von Gleichung (17.) die Funktion $\varphi(h, k)$ auf die Form

$$(19.) \qquad \varphi(h, k) = \frac{1}{f_{22}}[(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)h^2 + (f_{12}h + f_{22}k)^2]$$

bringen.

Gelten die Ungleichungen (16.) und (18.), so kann man für hinreichend kleine Werte von h und k die oben eingeführte Größe β kleiner machen als die Werte von

$$\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{11}} \quad \text{und} \quad \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{22}},$$

woraus sich ergibt, daß dann auch

$$\beta < \frac{f_{11}f_{22}}{4f_{22}} = \frac{f_{11}}{4} < f_{11} \quad \text{und} \quad \beta < \frac{f_{11}f_{22}}{4f_{11}} = \frac{f_{22}}{4} < f_{22}$$

ist. Dadurch wird für $h \gtrless 0$, $k = 0$ nach Ungleichung (14.)

$$(20.) \qquad \varphi(h, k) = f_{11}h^2 > \beta h^2 > 2|R|,$$

und für $h = 0$, $k \gtrless 0$

$$(21.) \qquad \varphi(h, k) = f_{22}k^2 > \beta k^2 > 2|R|.$$

Ferner wird nach Gleichung (19.) für $|h| \geqq |k| > 0$

$$(22.) \quad \varphi(h, k) \geqq \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}}h^2 > 4\beta h^2 > \beta(|h| + |k|)^2 > 2|R|,$$

und nach Gleichung (17.) für $|k| \geqq |h| > 0$

$$(23.) \quad \varphi(h, k) \geqq \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}k^2 > 4\beta k^2 > \beta(|h| + |k|)^2 > 2|R|.$$

Deshalb wird nach Gleichung (12.)

$$\Delta = \frac{1}{2}\varphi(h, k) + R,$$

gleichviel, ob R positiv oder negativ ist, mit $\varphi(h, k)$ gleiches Vorzeichen haben, d. h. Δ ist *beständig positiv.*

Somit sind die Bedingungen

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0 \tag{24.}$$

dafür, daß $f(x, y)$ ein *Minimum* wird, auch *hinreichend.*

Ebenso findet man aus Gleichung (17.), daß die Funktion $\varphi(h, k)$ *beständig negativ* ist, wenn

$$f_{11} < 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0 \tag{25.}$$

ist. Aus $f_{11}f_{22} > f_{12}^2 > 0$ folgt dann, daß auch $f_{22} < 0$ sein muß.

Macht man jetzt die absoluten Beträge von h und k so klein, daß β kleiner wird als die Größen

$$-f_{11}, \quad -f_{22}, \quad -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{11}}, \quad -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{4f_{22}},$$

so wird für $h \gtrless 0$, $k = 0$ nach Ungleichung (14.)

$$-\varphi(h, k) = -f_{11}h^2 > \beta h^2 > 2|R|, \tag{26.}$$

und für $h = 0$, $k \gtrless 0$

$$-\varphi(h, k) = -f_{22}k^2 > \beta k^2 > 2|R|. \tag{27.}$$

Ferner wird nach Gleichung (19.) für $|h| \geqq |k| > 0$

$$-\varphi(h, k) > -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{22}}h^2 > 4\beta h^2 \geqq \beta(|h| + |k|)^2 > 2|R|, \tag{28.}$$

und nach Gleichung (17.) für $|k| \geqq |h| > 0$

$$-\varphi(h, k) > -\frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}k^2 > 4\beta k^2 \geqq \beta(|h| + |k|)^2 > 2|R|. \tag{29.}$$

Deshalb hat auch in diesem Falle, gleichviel, ob R positiv oder negativ ist, Δ mit $\varphi(h, k)$ für hinreichend kleine Werte von h und k gleiches Vorzeichen, d. h. Δ ist *beständig negativ.*

Somit sind die Bedingungen

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0 \tag{30.}$$

dafür, daß $f(x, y)$ ein *Maximum* wird, auch *hinreichend.*

Ist dagegen

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0, \tag{31.}$$

so ist $\varphi(h, k)$ *keine definite Form*, denn für $k = 0$ hat $\varphi(h, k) = f_{11}h^2$ *gleiches* Vorzeichen mit f_{11}, aber für $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}}$, oder $f_{11}h + f_{12}k = 0$ wird nach Gleichung (17.)

$$\varphi(h, k) = \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}k^2 \tag{32.}$$

und hat deshalb das *entgegengesetzte* Zeichen wie f_{11}. Dabei wird für diese besonderen Werte von h und k die Funktion $\varphi(h, k)$ über das Vorzeichen von $\varDelta$ entscheiden, denn die Ausdrücke

$$f_{11}h^2 \quad \text{und} \quad \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}k^2$$

werden für verschwindend kleine Werte von h und k nur verschwindend klein von der *zweiten* Ordnung, während R verschwindend klein wird von der *dritten* Ordnung. Deshalb wird, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0$$

ist, $f(x, y)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum*, da $\varDelta$ weder beständig negativ noch beständig positiv ist.

Ist endlich

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0, \quad \text{oder} \quad f_{11}f_{22} = f_{12}^2, \tag{33.}$$

so wird nach Gleichung (17.), wenn $f_{11} \gtrless 0$ ist,

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}}(f_{11}h + f_{12}k)^2, \tag{34.}$$

oder nach Gleichung (19.), wenn $f_{22} \lesseqgtr 0$ ist,

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{f_{22}}(f_{12}h + f_{22}k)^2. \tag{35.}$$

In diesem Falle nennt man die homogene Funktion $\varphi(h, k)$ eine *„semidefinite Form“*; sie verschwindet nämlich für $h = 0$, $k = 0$ und *außerdem* noch für $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}} = -\frac{f_{22}k}{f_{12}}$, während sie für alle anderen Werte von h und k dasselbe Vorzeichen hat wie f_{11}, bezw. wie f_{22}. Deshalb kann jetzt $\varphi(h, k)$, wenn h dem Werte $-\frac{f_{12}k}{f_{11}}$ sehr nahe liegt, für verschwindend kleine Werte von h und k verschwindend

klein werden von der *dritten* Ordnung; der absolute Betrag von $\varphi(h, k)$ kann dann möglicherweise kleiner sein als der von $2R$, so daß $\varphi(h, k)$ nicht mehr über das Vorzeichen von $\varDelta$ entscheidet.

Wie dies geschieht, möge zunächst bei einem Beispiele gezeigt werden. Es sei

$$f(x, y) = (2px - y^2)(2qx - y^2) \tag{36.}$$
$$= 4pqx^2 - 2(p+q)xy^2 + y^4,$$

also

$$f_1(x, y) = 8pqx - 2(p+q)y^2, \quad f_2(x, y) = -4(p+q)xy + 4y^3, \tag{37.}$$

$$f_{11}(x, y) = 8pq, \quad f_{12}(x, y) = -4(p+q)y, \tag{38.}$$
$$f_{22}(x, y) = -4(p+q)x + 12y^2.$$

Da die Funktionen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ beide verschwinden, so muß man untersuchen, ob für diese Werte von x und y ein Maximum oder ein Minimum eintritt. Aus den Gleichungen (38.) ergibt sich für $x = 0$, $y = 0$

$$f_{11}(0, 0) = 8pq, \quad f_{12}(0, 0) = 0, \quad f_{22}(0, 0) = 0, \tag{39.}$$

also

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0. \tag{40.}$$

Die Bedingungen, welche *bisher* für das Eintreten eines Maximums oder eines Minimums aufgestellt worden sind, werden also nicht erfüllt.

Dagegen folgt aus

$$f(0+h, 0+k) = f(h, k) = 4pqh^2 - 2(p+q)hk^2 + k^4, \tag{41.}$$

daß die Funktion $\varphi(h, k)$, welche sich in diesem Falle auf das eine Glied $8pqh^2$ reduziert, nicht immer über das Vorzeichen von

$$\varDelta = f(h, k) - f(0, 0) = 4pqh^2 - 2(p+q)hk^2 + k^4 \tag{42.}$$

entscheidet. Setzt man z. B.

$$k^2 = 2lh, \tag{43.}$$

wo man über die Größe l noch beliebig verfügen darf, so wird

$$\varDelta = 4[pq - (p+q)l + l^2]h^2 = 4(l-p)(l-q)h^2. \tag{44.}$$

Unter der Voraussetzung, daß $p > q$ ist, wird deshalb Δ *positiv*, wenn $l > p$ oder $l < q$ ist; dagegen wird Δ *negativ*, wenn $p > l > q$ ist. Obgleich also $\varphi(h, k)$ ***niemals negativ*** werden kann, wenn p und q dasselbe Vorzeichen haben, wird Δ doch *positive und negative* Werte annehmen, so daß $f(0, 0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* ist.

Bemerkung.

In dem Falle, wo

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

ist, liegt die folgende, *fehlerhafte* Schlußweise nahe. Wenn z. B. $f_{11} \gtrless 0$ ist, so folgt aus Gleichung (17.) für $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$, daß

$$\varphi(h, k) = \frac{1}{f_{11}}(f_{11}h + f_{12}k)^2 \tag{45.}$$

ist, folglich hat $\varphi(h, k)$ immer dasselbe Vorzeichen wie f_{11}. Nur für $f_{11}h = -f_{12}k$ wird $\varphi(h, k)$ gleich Null und kann deshalb nicht mehr über das Vorzeichen von Δ entscheiden. Für diesen besonderen Wert von $h:k$ muß also das Vorzeichen von Δ noch untersucht werden, indem man

$$\Delta = f\left(x - \frac{f_{12}k}{f_{11}}, y + k\right) - f(x, y)$$

nach steigenden Potenzen von k entwickelt. Da man es hierbei nur mit einer einzigen Veränderlichen k zu tun hat, und da unter den gemachten Voraussetzungen die Glieder erster und zweiter Dimension verschwinden, so wird

$$\Delta = Ck^3 + Dk^4 + Ek^5 + \cdots.$$

Ist $C \gtrless 0$, so wechselt für hinreichend kleine Werte von k die Größe Δ mit k zugleich das Vorzeichen, so daß *weder ein Maximum noch ein Minimum* eintreten kann. Ist aber $C = 0$, so tritt ein *Minimum* ein, wenn f_{11} und D *beide positiv* sind, und ein *Maximum*, wenn f_{11} und D *beide negativ* sind. Haben f_{11} und D *verschiedenes* Vorzeichen, so tritt *weder ein Maximum noch ein Minimum* ein.

Daß diese Schlußweise *fehlerhaft* ist, lehrt schon das oben angeführte Beispiel, in welchem $f(0, 0)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* ist, obgleich in

$$\Delta = 4pqh^2 - 2(p + q)hk^2 + k^4$$

alle soeben angegebenen Bedingungen für das Eintreten eines Minimums erfüllt sind. Es ist nämlich unter der Voraussetzung, daß p und q gleiches Vorzeichen haben,

1) $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0,$

2) $f_{11} = 8pq > 0,$

3) der Koeffizient C von k^3 in der Entwickelung von Δ nach steigenden Potenzen von k ist gleich 0, weil $h = -\frac{f_{12}k}{f_{11}} = 0$ ist,

4) der Koeffizient D von k^4 in dieser Entwickelung ist gleich $+1$, also *positiv*.

Der Fehler der angeführten Schlußweise liegt darin, daß für das Vorzeichen von Δ die Glieder höherer Dimensionen nicht nur in dem Falle den Ausschlag geben, wo $\varphi(h, k)$ *verschwindet*, sondern auch schon dann, wenn $\varphi(h, k)$ sich dem Werte 0 *nähert*, ohne daß h und k gleich 0 werden. Indem die Funktion $\varphi(h, k)$ für hinreichend kleine Werte von h und k beliebig klein wird von einer höheren als der zweiten Ordnung, kann sie, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner sein als die Summe der Glieder dritter und höherer Dimensionen.

Will man in dem Falle, wo

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

ist, die Untersuchung, ob $f(x, y)$ ein Maximum oder ein Minimum, oder keines von beiden ist, zu Ende führen, so muß man beachten, daß Δ eine Funktion von h und k $F(h, k)$ ist, deren Vorzeichen für sehr kleine Werte von h und k bestimmt werden soll. Indem man zunächst annimmt, daß h einen sehr kleinen positiven oder negativen, aber *konstanten* Wert besitzt, kann man $F(h, k)$ als eine Funktion der einzigen Veränderlichen k betrachten und nach den Regeln, welche für die Theorie der Maxima und Minima bei Funktionen von *einer* Veränderlichen gelten, die Werte von k bestimmen, für welche $F(h, k)$ ein Maximum oder ein Minimum wird. Zu diesem Zwecke sucht man die Werte von k auf, für welche

$$\frac{\partial F(h, k)}{\partial k} = F_2(h, k) = 0$$

wird. Von diesen Werten braucht man aber nur diejenigen zu berücksichtigen, welche zwischen den beiden *konstanten* Grenzen $-h$ und $+h$ liegen; sie seien (der Größe nach geordnet)

$$k_1 = \varphi_1(h),\ k_2 = \varphi_2(h), \ldots k_m = \varphi_m(h).$$

Ebenso kann man annehmen, daß k einen sehr kleinen positiven oder negativen, aber *konstanten* Wert besitzt, und $F(h, k)$ als Funktion der einzigen Veränderlichen h be-

trachten. Indem man die Werte von h aufsucht, für welche

$$\frac{\partial F(h, k)}{\partial h} = F_1(h, k) = 0$$

wird, findet man die Werte von h, für welche $F(h, k)$ möglicherweise ein Maximum oder ein Minimum wird. Auch hier braucht man nur diejenigen Werte von h zu berücksichtigen, welche zwischen den beiden *konstanten* Grenzen $-k$ und $+k$ liegen; sie seien (der Größe nach geordnet)

$$h_1 = \psi_1(k),\ h_2 = \psi_2(k), \ldots h_n = \psi_n(k).$$

Ergibt sich jetzt, daß die Größen

$$(46.)\quad \begin{cases} F(h, -h),\ F(h, k_1),\ F(h, k_2), \ldots F(h, k_m),\ F(h, +h), \\ F(-k, k),\ F(h_1, k),\ F(h_2, k), \ldots F(h_n, k),\ F(+k, k) \end{cases}$$

sämtlich negativ sind, so ist $\varDelta$ für *alle* in Betracht kommenden Werte von h und k negativ, weil auch die *größten* Werte von $\varDelta$ noch negativ sind. Ergibt sich aber, daß die in (46.) angegebenen Größen *sämtlich positiv* sind, so ist $\varDelta$ für alle in Betracht kommenden Werte von h und k positiv, weil auch die *kleinsten* Werte von $\varDelta$ noch positiv sind. In dem ersten Falle wird also $f(x, y)$ ein ***Maximum*** und in dem zweiten Falle ein ***Minimum***.

Diese Bedingungen sind gleichzeitig auch die *notwendigen:* denn sind die unter (46.) angegebenen Größen teilweise positiv und teilweise negativ, so wechselt $\varDelta$ das Vorzeichen, woraus dann folgt, daß $f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum wird.

Die vorstehenden Umformungen sind unter der Voraussetzung durchgeführt worden, daß $f_{11} \gtrless 0$ ist. Fällt diese Voraussetzung fort, so wird im allgemeinen weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten.

Ist nämlich

$$(47.)\quad f_{11} = 0, \quad f_{12} \gtrless 0, \quad f_{22} \gtrless 0,$$

so wird

$$(48.)\quad \begin{aligned} \varphi(h, k) &= 2f_{12}hk + f_{22}k^2 \\ &= \frac{1}{f_{22}}\left[(f_{12}h + f_{22}k)^2 - f_{12}{}^2h^2\right]. \end{aligned}$$

Für $h = 0$ hat daher $\varphi(h, k)$ mit f_{22} *gleiches* Vorzeichen; für $h = -\frac{f_{22}k}{f_{12}}$ dagegen sind die Vorzeichen von $\varphi(h, k)$ und f_{22} *ungleich*.

In ähnlicher Weise kann man den Fall erledigen, wo

(49.) $$f_{11} \gtrless 0, \quad f_{12} \gtrless 0, \quad f_{22} = 0$$

ist; man braucht nur die Indizes 1 und 2 und die Größen h und k miteinander zu vertauschen.

Ist ferner

(50.) $$f_{11} = 0, \quad f_{12} \lesseqgtr 0, \quad f_{22} = 0,$$

so wechselt

(51.) $$\varphi(h, k) = 2f_{12}hk$$

mit h (und ebenso mit k) das Vorzeichen. Wenn also die Voraussetzungen (47.), (49.) oder (50.) gelten, *kann weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten.* Denn $\varDelta$ wechselt mit $\varphi(h, k)$ zugleich das Vorzeichen, da die betrachteten Werte von $\varphi(h, k)$ kleine Größen *zweiter* Ordnung sind und sich von $2\varDelta$ nur durch kleine Größen *dritter* Ordnung unterscheiden.

Die Fälle, in denen

(52.) $$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} \gtrless 0,$$

oder

(53.) $$f_{11} \gtrless 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0$$

ist, geben

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0$$

und sind oben schon ausführlich behandelt worden.

Es bleibt daher nur der Fall übrig, wo

(54.) $$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0$$

ist; dann wird nach dem *Taylor*schen Lehrsatze

(55.) $$\varDelta = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(3)} + R,$$

oder

(55a.) $$6\varDelta = f_{111}h^3 + 3f_{112}h^2k + 3f_{122}hk^2 + f_{222}k^3 + 6R,$$

wobei nach Formel Nr. 268 der Tabelle

$$(56.)\quad \begin{aligned} 6R = & \ [f_{111}(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_{111}(x,\ y)]h^3 \\ & + 3\,[f_{112}(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_{112}(x,\ y)]h^2k \\ & + 3\,[f_{122}(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_{122}(x,\ y)]hk^2 \\ & + \ [f_{222}(x+\Theta h,\ y+\Theta k) - f_{222}(x,\ y)]k^3 \end{aligned}$$

ist. Da man die Stetigkeit der Funktionen $f_{111}(x,\ y)$, $f_{112}(x,\ y)$, $f_{122}(x,\ y)$, $f_{222}(x,\ y)$ voraussetzt, so kann man für hinreichend kleine Werte von h und k die absoluten Beträge der Größen, welche bei Gleichung (56.) in den eckigen Klammern stehen, kleiner machen als eine beliebige kleine Größe γ, folglich wird

$$(57.)\qquad 6\,|\,R\,| < \gamma(\,|\,h\,| + |\,k\,|)^3.$$

Sind die Größen f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222} nicht alle vier gleich 0, und sind u_1, u_2, u_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(58.)\qquad f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222} = 0,$$

so wird $f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222}$ für alle Werte von u, welche von u_1, u_2 und u_3 verschieden sind, eine *endliche* Größe sein. Indem man für einen solchen positiven Wert von u

$$(59.)\qquad \gamma < \frac{f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222}}{(u+1)^3}$$

macht und $h = u\,.\,k$ setzt, wird nach Gleichung (57.), vom Vorzeichen abgesehen,

$$6\,|\,R\,| < \gamma(u+1)^3k^3,$$

also

$$(60.)\qquad \begin{aligned} & f_{111}h^3 + 3f_{112}h^2k + 3f_{122}hk^2 + f_{222}k^3 \\ = & (f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222})k^3 > \gamma(u+1)^3k^3 > 6\,|\,R\,|. \end{aligned}$$

Deshalb hat $\varDelta$ das gleiche Vorzeichen wie $(f_{111}u^3 + 3f_{112}u^2 + 3f_{122}u + f_{222})k^3$, ein Ausdruck, der mit k das Vorzeichen wechselt; folglich hat $\varDelta$ positive und negative Werte, so daß $f(x,\ y)$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* werden kann, wenn die Größen f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222} nicht alle vier gleich 0 sind.

Gelten die neun Bedingungen

$$(61.)\qquad \begin{cases} f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_{11} = 0,\ f_{12} = 0,\ f_{22} = 0, \\ f_{111} = 0,\ f_{112} = 0,\ f_{122} = 0,\ f_{222} = 0, \end{cases}$$

so findet man nach dem *Taylor*schen Lehrsatze

$$(62.)\qquad \varDelta = \frac{1}{4!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(4)} + R.$$

Der Ausdruck $\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(4)}$ ist eine homogene Funktion $g(h, k)$ *vierten* Grades von h und k und kann nach den Sätzen der Algebra in zwei homogene Funktionen *zweiten* Grades $g_1(h, k)$ und $g_2(h, k)$ zerlegt werden. Sind $g_1(h, k)$ und $g_2(h, k)$ zwei *definite Formen*, so läßt sich zeigen, daß Δ für hinreichend kleine Werte von h und k gleiches Vorzeichen mit $g(h, k)$ hat, daß also $f(x, y)$ ein *Maximum* oder ein *Minimum* wird, je nachdem $g(h, k)$ *beständig negativ* oder *beständig positiv* ist.

Diese Untersuchung wird jedoch nur in äußerst seltenen Fällen erforderlich sein und möge deshalb an dieser Stelle nicht weitergeführt werden.

Im allgemeinen wird man schon mit der folgenden Regel auskommen:

$z = f(x, y)$ wird ein Minimum, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0; \tag{63.}$$

und $z = f(x, y)$ wird ein Maximum, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0; \tag{64.}$$

dagegen wird $z = f(x, y)$ weder ein Maximum noch ein Minimum, wenn zwar

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad \textit{aber} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0. \tag{65.}$$

§ 166.

Geometrische Deutung der vorhergehenden Untersuchungen*).

Die vorstehenden Untersuchungen werden anschaulich, wenn man

$$z = f(x, y) \tag{1.}$$

als Gleichung einer Fläche auffaßt. Nach Formel Nr. 254 der Tabelle hat dann die Tangentialebene im Flächenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z die Gleichung

*) Auch hier werden die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes als bekannt vorausgesetzt.

(2.) $$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y).$$

Sind nun die Bedingungen

(3.) $$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1(x, y) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_2(x, y) = 0$$

erfüllt, so reduziert sich Gleichung (2.) auf

(4.) $$z' - z = 0,$$

d. h. *die Tangentialebene im Punkte P wird parallel zur XY-Ebene.* Setzt man jetzt noch

(5.) $x' = x + h$, $y' = y + k$, also $h = x' - x$, $k = y' - y$,

so kann man die Gleichung der Fläche auf die Form

(6.) $$z' = f(x', y') = z + \frac{1}{2}(f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2) + [h, k]_3$$

bringen, wobei mit $[h, k]_3$ die Glieder dritter und höherer Dimension bezeichnet sind. Deshalb wird $z' - z$ mit h und k zugleich unendlich klein von der zweiten Ordnung. Sind nun h und k wirklich beliebig klein und so bestimmt, daß $z' - z$ einen kostanten Wert l beibehält, so ist

(7.) $$z' - z = l$$

die Gleichung einer Ebene, welche der Tangentialebene im Punkte P parallel ist und ihr beliebig nahe liegt. Für den Durchschnitt dieser Ebene mit der Fläche findet man aus Gleichung (6.) unter Vernachlässigung der beliebig kleinen Größen *dritter* und *höherer* Ordnung,

(8.) $$f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 = 2l,$$

oder

(8a.) $$f_{11}(x' - x)^2 + 2f_{12}(x' - x)(y' - y) + f_{22}(y' - y)^2 = 2l.$$

Diese Gleichung stellt einen kleinen Kegelschnitt dar, welcher „der *Dupin*sche Kegelschnitt" oder die dem Flächenpunkte P entsprechende „*Indikatrix*" genannt wird, weil man aus der Gestalt dieses Kegelschnittes über die Krümmung der Fläche im Punkte P Auskunft erhält; und zwar ist bekanntlich die Kurve eine *Ellipse*, wenn

(9.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0$$

wird. Damit aber diese Ellipse *reell* ist, müssen f_{11} (und ebenso f_{22}) mit l gleiches Zeichen haben.

Dies entspricht ganz der Anschauung. Ist nämlich der Punkt ein *tiefster* Punkt, dann muß in Gleichung (7.) die Größe l einen *positiven* Wert haben, weil die Tangentialebene nur bei einer kleinen Parallelverschiebung nach *oben* die Fläche in einer kleinen ellipsenartigen Kurve schneiden kann, d. h. es müssen die Bedingungen

$$f_{11} > 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0 \tag{10.}$$

befriedigt sein.

Ist der Punkt P ein *höchster* Punkt, so muß in Gleichung (7.) die Größe l einen *negativen* Wert haben, weil die Tangentialebene nur bei einer kleinen Parallelverschiebung nach *unten* die Fläche in einer kleinen ellipsenartigen Kurve schneiden kann, d. h. es müssen die Bedingungen

$$f_{11} < 0 \quad \text{und} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0 \tag{11.}$$

befriedigt werden. In beiden Fällen nennt man den Punkt P *„elliptisch"*.

Die Gleichung (8a.) stellt dagegen eine Hyperbel dar, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0, \tag{12.}$$

gleichviel, ob l positiv oder negativ ist. Die Schnittkurve der Fläche mit jeder Ebene, welche zur Tangentialebene parallel ist und ihr sehr nahe liegt, hat dann in der Nähe des Flächenpunktes P die Gestalt einer kleinen *Hyperbel*, was nur dadurch möglich wird, daß die Fläche im Punkte P *sattelförmig* ist.

In diesem Falle nennt man den Punkt P *„hyperbolisch"* und erkennt, daß P weder ein *höchster* noch ein *tiefster* Punkt der Fläche sein kann.

Die dem Flächenpunkte P entsprechende *Indikatrix* ist also eine *Ellipse*, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0,$$

sie ist eine *Hyperbel*, wenn

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0, \quad \text{oder} \quad f_{11}f_{22} = f_{12}^2 \tag{13.}$$

wird; dann kann man die Gleichung (8a.) auf die Form

$$f_{11}^2(x'-x)^2 + 2f_{11}f_{12}(x'-x)(y'-y) + f_{12}^2(y'-y)^2 = 2f_{11}l$$

bringen und erhält, indem man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel auszieht,

$$f_{11}(x'-x) + f_{12}(y'-y) = \pm\sqrt{2f_{11}\,.\,l}. \tag{14.}$$

Die Indikatrix zerfällt daher in diesem Falle in *zwei parallele Gerade.* Ein solcher Flächenpunkt entspricht im allgemeinen *weder einem eigentlichen Maximum noch einem eigentlichen Minimum von z*, wie folgendes Beispiel zeigen möge.

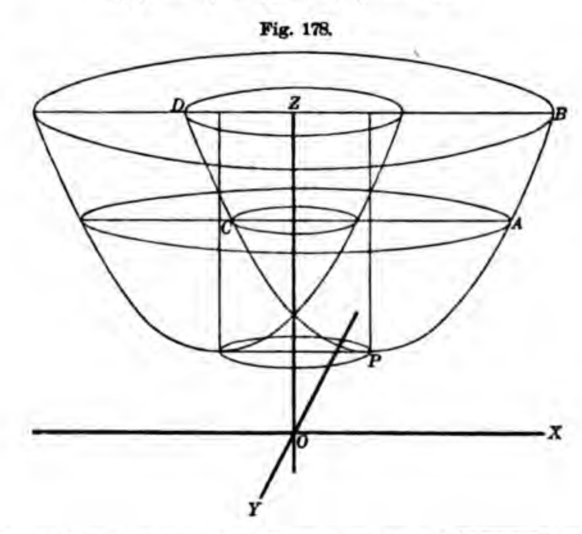
Es rotiere eine Parabel mit der Gleichung

$$2p(z-c) = (x-a)^2 \tag{15.}$$

um die Z-Achse (Fig. 178), dann hat die Rotationsfläche die Gleichung

$$2p(z-c) = (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2. \tag{16.}$$

Fig. 178.



Bezeichnet man der Kürze wegen $\sqrt{x^2+y^2}$ mit r, so wird

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \tag{17.}$$

$$(18.)\qquad z = f(x, y) = c + \frac{(r-a)^2}{2p}.$$

Um einen höchsten oder tiefsten Punkt P der Fläche aufzufinden, muß man seine Koordinaten x, y, z so bestimmen, daß außer der Gleichung (18.) noch die beiden Gleichungen

$$(19.)\qquad f_1(x, y) = \frac{(r-a)x}{pr} = 0, \quad f_2(x, y) = \frac{(r-a)y}{pr} = 0$$

befriedigt werden. Dies geschieht, indem man

$$(20.)\qquad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad \text{also} \quad r = a \text{ und } z = c$$

setzt, wobei der Winkel φ noch beliebig ist. Nun ist aber

$$(21.)\qquad f_{11} = \frac{r^3 - ay^2}{pr^3}, \quad f_{12} = \frac{axy}{pr^3}, \quad f_{22} = \frac{r^3 - ax^2}{pr^3},$$

oder für die Koordinaten des Punktes P

$$(22.)\qquad f_{11} = \frac{\cos^2\varphi}{p}, \quad f_{12} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{p}, \quad f_{22} = \frac{\sin^2\varphi}{p},$$

$$(23.)\qquad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 0.$$

Der Punkt P ist hier kein tiefster Punkt, denn er liegt auf dem Kreise, welchen der Scheitel der Parabel bei der Rotation beschreibt, so daß es allerdings Punkte in seiner unmittelbaren Nachbarschaft gibt, welche dieselbe Koordinate z haben und deshalb mit P in gleicher Höhe liegen. Aus dem vorstehenden Beispiele erkennt man auch, daß ein Flächenpunkt P durchaus nicht immer ein tiefster Punkt ist, wenn seine Tangentialebene zur XY-Ebene *parallel* ist, und wenn die Schnittkurven der Fläche mit allen durch P gelegten vertikalen Ebenen nach oben *konkav* sind.

Verschiebt man die Tangentialebene im Punkte P um die kleine Größe l nach oben, indem man

$$(24.)\qquad z = c + l$$

setzt, so schneidet diese Ebene aus der Fläche zwei konzentrische Kreise mit den Gleichungen

$$(25.)\qquad x^2 + y^2 = (a + \sqrt{2pl})^2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = (a - \sqrt{2pl})^2$$

aus. Die Indikatrix besteht in diesem Falle also aus zwei parallelen Linien, da in hinreichender Nähe des Punktes P die beiden Kreise mit ihren Tangenten zusammenfallen.

§ 167.

Maxima und Minima der Funktionen von drei oder mehr unabhängigen Veränderlichen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 271 und 272.)

Bei Funktionen von drei oder mehr unabhängigen Veränderlichen gestaltet sich die Untersuchung ganz ähnlich wie bei Funktionen von zwei Veränderlichen. Soll z. B.

$$u = f(x, y, z) \tag{1.}$$

ein Maximum oder ein Minimum werden, so muß

$$\Delta = f(x + h, y + k, z + l) - f(x, y, z) \tag{2.}$$

für alle hinreichend kleinen, positiven oder negativen Werte von h, k, l bei einem *Minimum beständig positiv* und bei einem *Maximum beständig negativ* sein. Aus der Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe findet man, daß dies nur möglich ist, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0 \tag{3.}$$

ist. Sind diese drei Bedingungen erfüllt, so folgt weiter aus der Entwickelung nach der *Taylor*schen Reihe, daß für hinreichend kleine Werte von h, k, l die Differenz Δ dasselbe Zeichen hat wie

$$\varphi(h, k, l) = f_{11}h^2 + 2f_{12}hk + f_{22}k^2 + 2f_{13}hl + 2f_{23}kl + f_{33}l^2, \tag{4.}$$

es sei denn, daß diese Funktion $\varphi(h, k, l)$ gleich Null wird für Werte von h, k, l, die von Null verschieden sind. Die Entscheidung, unter welchen Bedingungen $\varphi(h, k, l)$ eine „*definite Form*" ist, d. h. die Entscheidung darüber, ob $\varphi(h, k, l)$ *beständig positiv*, bezw. *beständig negativ* ist, ergibt sich durch eine Umformung von $\varphi(h, k, l)$ unter Anwendung der Determinantentheorie.

Es seien die Größen $D_1, D_2, D_3, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}, h', k', h''$ durch die folgenden Gleichungen erklärt:

$$D_1 = f_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}, \tag{5.}$$

$$(6.)\quad \alpha_{31} = \begin{vmatrix} f_{12} f_{13} \\ f_{22} f_{23} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} f_{13} f_{11} \\ f_{23} f_{21} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix} = D_2,$$

$$(7.)\quad h' = h - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}} l, \quad k' = k - \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}} l, \quad h'' = h' + \frac{f_{12}}{f_{11}} k';$$

dann wird nach den Formeln Nr. 217 und 219 der Tabelle

$$(8.)\quad D_3 = f_{31}\alpha_{31} + f_{32}\alpha_{32} + f_{33}\alpha_{33},$$

$$(9.)\quad f_{11}\alpha_{31} + f_{12}\alpha_{32} + f_{13}\alpha_{33} = 0,$$

$$(10.)\quad f_{21}\alpha_{31} + f_{22}\alpha_{32} + f_{23}\alpha_{33} = 0.$$

Bringt man also Gleichung (4.) auf die Form

$$(4a.)\quad \begin{aligned} \varphi(h, k, l) = {} & h(f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l) \\ & + k(f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l) \\ & + l(f_{31}h + f_{32}k + f_{33}l) \end{aligned}$$

und setzt, den Gleichungen (7.) entsprechend,

$$h = h' + \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{33}} l, \quad k = k' + \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{33}} l,$$

so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.), (9.) und (10.)

$$(11.)\quad \begin{aligned} f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l &= f_{11}h' + f_{12}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{11}\alpha_{31} + f_{12}\alpha_{32} + f_{13}\alpha_{33}) \\ &= f_{11}h' + f_{12}k', \end{aligned}$$

$$(12.)\quad \begin{aligned} f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l &= f_{21}h' + f_{22}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{21}\alpha_{31} + f_{22}\alpha_{32} + f_{23}\alpha_{33}) \\ &= f_{21}h' + f_{22}k', \end{aligned}$$

$$(13.)\quad \begin{aligned} f_{31}h + f_{32}k + f_{33}l &= f_{31}h' + f_{32}k' + \frac{l}{\alpha_{33}}(f_{31}\alpha_{31} + f_{32}\alpha_{32} + f_{33}\alpha_{33}) \\ &= f_{31}h' + f_{32}k' + \frac{D_3 l}{\alpha_{33}}; \end{aligned}$$

folglich geht Gleichung (4a.) über in

$$(14.)\quad \begin{aligned} \varphi(h, k, l) &= h(f_{11}h' + f_{12}k') + k(f_{21}h' + f_{22}k') \\ &\quad + l(f_{31}h' + f_{32}k') + \frac{D_3 l^2}{\alpha_{33}} \\ &= h'(f_{11}h + f_{12}k + f_{13}l) + k'(f_{21}h + f_{22}k + f_{23}l) + \frac{D_3 l^2}{\alpha_{33}}. \end{aligned}$$

Dies gibt, wenn man die Gleichungen (11.) und (12.) nochmals anwendet, mit Rücksicht auf die Gleichungen (5.)

$$(15.)\quad \varphi(h,k,l) = h'(f_{11}h' + f_{12}k') + k'(f_{21}h' + f_{22}k') + \frac{D_3 l^2}{D_2}$$

oder

$$(16.)\quad \varphi(h,k,l) = f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 + \frac{D_3 l^2}{D_2}\,{}^{*)}.$$

Jetzt ist noch, wie schon in § 165 gezeigt wurde,

$$f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 = f_{11}\left(h' + \frac{f_{12}}{f_{11}}k'\right)^2 + \frac{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}{f_{11}}k'^2,$$

folglich wird

$$(25.)\quad \varphi(h,k,l) = D_1 h''^2 + \frac{D_2}{D_1}k'^2 + \frac{D_3}{D_2}l^2.$$

Damit dieser Ausdruck *beständig positiv* ist, damit also $f(x, y, z)$ ein *Minimum* wird, müssen die drei Bedingungen

$$(26.)\quad D_1 > 0,\quad D_2 > 0,\quad D_3 > 0$$

---

*) Gleichung (16.) kann man auch ohne Anwendung von Determinanten in folgender Weise herleiten: Man setzt

$$(17.)\quad h = h' + \xi l,\quad k = k' + \eta l$$

in die Gleichung (4.) ein und erhält

$$(18.)\quad \varphi(h,k,l) = f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 + 2(f_{11}\xi + f_{12}\eta + f_{13})h'l$$
$$+ 2(f_{21}\xi + f_{22}\eta + f_{23})k'l + (f_{11}\xi^2 + 2f_{12}\xi\eta + f_{22}\eta^2$$
$$+ 2f_{13}\xi + 2f_{23}\eta + f_{33})l^2.$$

Jetzt kann man, wenn

$$(19.)\quad D_2 = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} \gtrless 0$$

ist, die Größen ξ und η so bestimmen, daß

$$(20.)\quad f_{11}\xi + f_{12}\eta + f_{13} = 0 \quad\text{und}\quad f_{21}\xi + f_{22}\eta + f_{23} = 0$$

wird. Das gibt nämlich

$$(21.)\quad \xi = \frac{f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}},\quad \eta = \frac{f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}.$$

Sind aber die Gleichungen (20.) befriedigt, und setzt man

$$(22.)\quad f_{31}(f_{12}f_{23} - f_{13}f_{22}) + f_{32}(f_{13}f_{21} - f_{11}f_{23}) + f_{33}(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) = D_3,$$

so wird

$$(23.)\quad f_{11}\xi^2 + 2f_{12}\xi\eta + f_{22}\eta^2 + 2f_{13}\xi + 2f_{23}\eta + f_{33}$$
$$= (f_{11}\xi + f_{12}\eta + f_{13})\xi + (f_{21}\xi + f_{22}\eta + f_{23})\eta + (f_{31}\xi + f_{32}\eta + f_{33})$$
$$= f_{31}\xi + f_{32}\eta + f_{33} = \frac{D_3}{D_2},$$

folglich geht Gleichung (4.) über in

$$(24.)\quad \varphi(h,k,l) = f_{11}h'^2 + 2f_{12}h'k' + f_{22}k'^2 + \frac{D_3 l^2}{D_2}.$$

erfüllt sein; und damit $\varphi(h, k, l)$ *beständig negativ* ist, damit also $f(x, y, z)$ ein *Maximum* wird, müssen die drei Bedingungen

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0 \tag{27.}$$

erfüllt sein.

Auch in diesem Falle ist $\varphi(h, k, l)$ nur dann eine *definite* Form, wenn von den Determinanten D_1, D_2, D_3 keine gleich Null wird, doch möge die ausführliche Untersuchung hier übergangen werden.

In ähnlicher Weise findet man, daß

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \tag{28.}$$

ein Minimum wird, wenn die ersten partiellen Ableitungen $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *sämtlich gleich Null sind, und wenn außerdem*

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \ldots D_n > 0. \tag{29.}$$

Dabei ist

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} f_{11} \, f_{12} \ldots f_{1\alpha} \\ f_{21} \, f_{22} \ldots f_{2\alpha} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ f_{\alpha 1} \, f_{\alpha 2} \ldots f_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \tag{30.}$$

für $\alpha = 1, 2, \ldots n$.

Dagegen wird u ein Maximum, wenn die ersten partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wieder sämtlich gleich Null, und wenn die Determinanten D_α mit geradem Index sämtlich positiv und die mit ungeradem Index sämtlich negativ sind.

Sind nämlich für ein Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ die ersten partiellen Ableitungen $f_1, f_2, \ldots f_n$ sämtlich gleich Null, so wird

$$\begin{aligned} \Delta &= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ &= \tfrac{1}{2}\varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) + [h_1, h_2, \ldots h_n]_3, \end{aligned} \tag{31.}$$

wobei der Rest der *Taylor*schen Reihe mit $[h_1, h_2, \ldots h_n]_3$ bezeichnet ist, um anzudeuten, daß er mit den Größen h_1, $h_2, \ldots h_n$ zugleich unendlich klein wird von der *dritten* Ordnung. Die Differenz Δ wird für hinreichend kleine

Werte von $h_1, h_2, \ldots h_n$ *beständig positiv* oder *beständig negativ* sein, wenn die homogene Funktion zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}(32.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = {} & h_1(f_{11}h_1 + f_{12}h_2 + \cdots + f_{1n}h_n)\\ & + h_2(f_{21}h_1 + f_{22}h_2 + \cdots + f_{2n}h_n)\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + h_n(f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \cdots + f_{nn}h_n)\end{aligned}$$

eine *definite Form* ist. Bezeichnet man wieder die Unterdeterminanten von D_n mit $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{nn}$, so erhält man nach den Formeln Nr. 217 und 219 der Tabelle

$$(33.)\quad D_n = f_{n1}\alpha_{n1} + f_{n2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{nn}\alpha_{nn},$$

$$(34.)\quad f_{r1}\alpha_{n1} + f_{r2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{rn}\alpha_{nn} = 0 \text{ für } r < n.$$

Daraus folgt, wenn man

$$(35.)\quad \left|\begin{array}{l} h_1 = h'_1 + \dfrac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} h_n, \quad h_2 = h'_2 + \dfrac{\alpha_{n2}}{\alpha_{nn}} h_n, \ldots \\ \qquad\qquad h_{n-1} = h'_{n-1} + \dfrac{\alpha_{n,\,n-1}}{\alpha_{nn}} h_n \end{array}\right.$$

setzt, mit Rücksicht auf Gleichung (34.) für $r < n$

$$\begin{aligned}(36.)\quad f_{r1}h_1 + f_{r2}h_2 + \cdots + f_{rn}h_n = {} & f_{r1}h'_1 + f_{r2}h'_2 + \cdots + f_{r,\,n-1}h'_{n-1}\\ & + \frac{h_n}{\alpha_{nn}}(f_{r1}\alpha_{n1} + f_{r2}\alpha_{n2} + \cdots + f_{rn}\alpha_{nn})\\ = {} & f_{r1}h'_1 + f_{r2}h'_2 + \cdots + f_{r,\,n-1}h'_{n-1},\end{aligned}$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (33.)

$$\begin{aligned}(37.)\quad f_{n1}h_1 + f_{n2}h_2 + \cdots + f_{nn}h_n = {} & f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots\\ & + f_{n,\,n-1}h'_{n-1} + \frac{h_n}{\alpha_{nn}}(f_{n1}\alpha_{n1} + f_{n2}\alpha_{n2} + \cdots\\ & \qquad + f_{nn}\alpha_{nn})\\ = {} & f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,\,n-1}h'_{n-1} + \frac{D_n h_n}{D_{n-1}}.\end{aligned}$$

Dies gibt

$$\begin{aligned}(38.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = {} & h_1(f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \cdots + f_{1,\,n-1}h'_{n-1})\\ & + h_2(f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \cdots + f_{2,\,n-1}h'_{n-1})\\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & + h_n(f_{n1}h'_1 + f_{n2}h'_2 + \cdots + f_{n,\,n-1}h'_{n-1})\\ & \qquad + \frac{D_n h^2_n}{D_{n-1}},\end{aligned}$$

oder, wenn man anders ordnet und $f_{\alpha\beta}$ mit $f_{\beta\alpha}$ vertauscht,

$$
(39.)\quad \begin{aligned} \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = {} & h'_1(f_{11}h_1 + f_{12}h_2 + \cdots + f_{1n}h_n) \\ & + h'_2(f_{21}h_1 + f_{22}h_2 + \cdots + f_{2n}h_n) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + h'_{n-1}(f_{n-1,1}h_1 + f_{n-1,2}h_2 + \cdots + f_{n-1,n}h_n) \\ & + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}}. \end{aligned}
$$

Indem man die Gleichungen (36.) noch einmal anwendet, findet man

$$
(40.)\quad \begin{aligned} & \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = \\ & h'_1(f_{11}h'_1 + f_{12}h'_2 + \cdots + f_{1,n-1}h'_{n-1}) \\ & + h'_2(f_{21}h'_1 + f_{22}h'_2 + \cdots + f_{2,n-1}h'_{n-1}) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + h'_{n-1}(f_{n-1,1}h'_1 + f_{n-1,2}h'_2 + \cdots + f_{n-1,n-1}h'_{n-1}) \\ & + \frac{D_n h_n^2}{D_{n-1}}, \end{aligned}
$$

oder

$$
(41.)\quad \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = \varphi(h'_1, h'_2, \ldots h'_{n-1}, 0) + \frac{D_n}{D_{n-1}} h_n^2.
$$

Da nun hierbei die homogene Funktion zweiten Grades $\varphi(h'_1, h'_2, \ldots h'_{n-1}, 0)$ nur noch $n-1$ Veränderliche enthält, so kann man diese Funktion in ähnlicher Weise auf die Form

$$
\varphi(h''_1, h''_2, \ldots h''_{n-2}, 0, 0) + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}(h'_{n-1})^2
$$

bringen und so fortfahren, bis man erhält

$$
(42.)\quad \begin{aligned} & \varphi(h_1, h_2, \ldots h_n) = \\ & D_1\left(h_1^{(n-1)}\right)^2 + \frac{D_2}{D_1}\left(h_2^{(n-2)}\right)^2 + \cdots + \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}(h'_{n-1})^2 + \frac{D_n}{D_{n-1}} h_n^2. \end{aligned}
$$

Aus dieser Darstellung ergeben sich dann ohne weiteres die oben aufgeführten Sätze.

§ 168.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll die Werte von x und y bestimmen, für welche

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10 \tag{1.}$$

ein Maximum oder ein Minimum wird.

Auflösung. Hier ist

$$f_1(x, y) = 2x + y - 5, \quad f_2(x, y) = x + 2y - 4, \tag{2.}$$

$$f_{11} = 2, \quad f_{12} = 1, \quad f_{22} = 2. \tag{3.}$$

Die beiden ersten partiellen Ableitungen $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ verschwinden nur für

$$x = 2, \quad y = 1, \tag{4.}$$

und zwar wird z für diese Werte von x und y ein *Minimum*, weil

$$f_{11} = 2 > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = 3 > 0. \tag{5.}$$

Der Gleichung (1.) entspricht ein elliptisches Paraboloid.

Aufgabe 2. Man soll die Zahl a so in drei Teile teilen, daß ihr Produkt ein Maximum wird.

Auflösung. Bezeichnet man zwei von diesen Teilen mit x und y, so wird der dritte $a - x - y$, und das Produkt, welches ein Maximum werden soll, ist

$$z = f(x, y) = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2. \tag{6.}$$

Daraus folgt

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y) = ay - 2xy - y^2 = y(a - 2x - y), \\ f_2(x, y) = ax - x^2 - 2xy = x(a - x \quad 2y), \end{array}\right. \tag{7.}$$

$$f_{11} = -2y, \quad f_{12} = a - 2x - 2y, \quad f_{22} = -2x. \tag{8.}$$

Da die Werte $x = 0$, oder $y = 0$ hier nicht in Betracht kommen können, wie schon aus der Natur der Aufgabe hervorgeht, so erhält man, indem man $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ gleich Null setzt, die Gleichungen

$$a - 2x - y = 0, \quad a - x - 2y = 0, \tag{9.}$$

welche nur für

(10.) $$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}$$

befriedigt werden. Da für dieses Wertepaar

(11.) $$f_{11} = -\frac{2a}{3} < 0, \; f_{12} = -\frac{a}{3}, \; f_{22} = -\frac{2a}{3}, \; f_{11}f_{22} - f_{12} = \frac{a^2}{3} > 0,$$

so tritt ein *Maximum* ein.

Dieser Aufgabe kann man auch die folgende Fassung geben: Von einem rechtwinkligen Parallelepipedon ist die Summe aller Kanten gleich $4a$; wie groß müssen die einzelnen Kanten sein, damit das Volumen ein Maximum wird?

Aus der vorstehenden Lösung sieht man, daß in diesem Falle das rechtwinklige Parallelepipedon mit möglichst großem Volumen ein Würfel ist.

Aufgabe 3. Man soll unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfange dasjenige ermitteln, welches den größten Flächeninhalt hat*).

Auflösung. Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist bekanntlich

(12. $$F = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)},$$

wenn man die Seiten mit a, b, c und den Umfang mit $2u$ zeichnet. Setzt man

(13.) $$a = x, \quad b = y,$$

so wird

---

*) Am einfachsten läßt sich die Aufgabe lösen, wenn man zunächst annimmt, daß c und $a + b = s$ gegeben sind, und die Seite a gleich x so bestimmt, daß der Flächeninhalt ein Maximum wird. Man hat es dann nur mit einer Funktion der einzigen Veränderlichen x zu tun und findet, daß das Dreieck ein gleichschenkliges sein muß, daß also $a = b$ ist. In derselben Weise kann man a und $b + c$ als gegeben ansehen und findet, daß der Flächeninhalt ein Maximum wird, wenn $b = c$ ist; folglich muß, wenn nur $a + b + c = 2u$ gegeben ist, $a = b = c$ sein, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird. (Vgl. Aufgabe 15 in § 65.)

In ähnlicher Weise kann man häufig Aufgaben aus der Theorie der Maxima und Minima für Funktionen von mehreren Veränderlichen zurückführen auf die Lösung von Aufgaben, bei denen die Funktion einer einzigen Veränderlichen ein Maximum oder ein Minimum werden soll. Wie dies z. B. bei der hier folgenden Aufgabe 4 möglich ist, ergibt sich aus den Aufgaben 20 und 21 in § 65.



(14.) $c = 2u - x - y, \quad u - c = x + y - u,$

(15.) $F^2 = u(u - x)(u - y)(x + y - u),$

also

(16.) $$f(x, y) = \frac{F^2}{u} = (u - x)(u - y)(x + y - u)$$
$$= (u - x)[- u^2 + u(x + 2y) - xy - y^2]$$
$$= (u - y)[- u^2 + u(y + 2x) - xy - x^2].$$

Da F mit $f(x, y)$ zugleich ein Maximum wird, so bilde man

(17.) $f_1(x, y) = (u - y)(2u - 2x - y),$

(18.) $f_2(x, y) = (u - x)(2u - x - 2y).$

Die Summe aller drei Seiten ist gleich $2u$, und jede Seite muß kleiner sein als die Summe der beiden anderen Seiten, so daß jede der Seiten kleiner sein muß als u. Deshalb dürfen in $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ die Faktoren $u - y$, bezw. $u - x$ nicht gleich 0 sein; man muß vielmehr

(19.) $2u - 2x - y = 0, \quad 2u - x - 2y = 0,$

oder

(20.) $$x = \frac{2u}{3}, \quad y = \frac{2u}{3}$$

setzen. Für diese Werte von x und y tritt auch wirklich ein Maximum ein, denn es ist

(21.) $$f_{11} = 2y - 2u = -\frac{2u}{3} < 0,$$

(22.) $$f_{12} = 2x + 2y - 3u = -\frac{u}{3}, \quad f_{22} = 2x - 2u = -\frac{2u}{3},$$

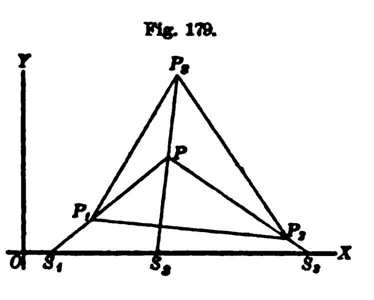
(23.) $$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{u^2}{3} > 0.$$

Unter allen Dreiecken mit gleichem Umfang hat also das gleichseitige den größten Inhalt.

Aufgabe 4. Von einem Dreieck sind die Koordinaten der Eckpunkte P_1, P_2, P_3, nämlich x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 gegeben; man soll die Koordinaten eines Punktes P finden, für welchen

$$S = p \, . \, PP_1 + q \, . \, PP_2 + r \, . \, PP_3$$

ein Minimum wird. (Vgl. Fig. 179 auf S. 785.)



Auflösung. Die Abstände des Punktes P von den Ecken seien s_1, s_2, s_3, und die Winkel, welche diese Linien mit der positiven Richtung der X-Achse bilden, seien

$$\sphericalangle XS_1P = \varphi_1,\quad \sphericalangle XS_2P = \varphi_2,\quad \sphericalangle XS_3P = \varphi_3{}^{*}),$$

dann wird

$$(24.)\quad s_1 = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2},\quad s_2 = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2},$$
$$s_3 = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2},$$

und es ist

$$(25.)\qquad S = p\,.\,s_1 + q\,.\,s_2 + r\,.\,s_3 = f(x, y)$$

die Funktion, welche ein Minimum werden soll. Nun ist für $\alpha = 1, 2, 3$

$$(26.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial s_\alpha}{\partial x} = \dfrac{x-x_\alpha}{\sqrt{(x-x_\alpha)^2+(y-y_\alpha)^2}} = \dfrac{x-x_\alpha}{s_\alpha}, \\[2ex] \dfrac{\partial s_\alpha}{\partial y} = \dfrac{y-y_\alpha}{\sqrt{(x-x_\alpha)^2+(y-y_\alpha)^2}} = \dfrac{y-y_\alpha}{s_\alpha}, \end{cases}$$

also

$$(27.)\quad \begin{cases} f_1(x, y) = \dfrac{p(x-x_1)}{s_1} + \dfrac{q(x-x_2)}{s_2} + \dfrac{r(x-x_3)}{s_3}, \\[2ex] f_2(x, y) = \dfrac{p(y-y_1)}{s_1} + \dfrac{q(y-y_2)}{s_2} + \dfrac{r(y-y_3)}{s_3}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$(28.)\quad \begin{cases} f_{11}(x, y) = \dfrac{p(y-y_1)^2}{s_1{}^3} + \dfrac{q(y-y_2)^2}{s_2{}^3} + \dfrac{r(y-y_3)^2}{s_3{}^3}, \\[2ex] f_{12}(x, y) = -\dfrac{p(x-x_1)(y-y_1)}{s_1{}^3} - \dfrac{q(x-x_2)(y-y_2)}{s_2{}^3} \\[2ex] \qquad\qquad - \dfrac{r(x-x_3)(y-y_3)}{s_3{}^3}, \\[2ex] f_{22}(x, y) = \dfrac{p(x-x_1)^2}{s_1{}^3} + \dfrac{q(x-x_2)^2}{s_2{}^3} + \dfrac{r(x-x_3)^2}{s_3{}^3}. \end{cases}$$

---

*) Man beachte, daß hierbei φ_3 der Winkel ist, den die von P nach P_3 gerichtete Strecke mit der positiven Richtung der X-Achse

Dabei wird

$$(29.)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{x-x_1}{s_1},\ \cos\varphi_2 = \dfrac{x-x_2}{s_2},\ \text{aber } \cos\varphi_3 = -\dfrac{x-x_3}{s_3}, \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{y-y_1}{s_1},\ \sin\varphi_2 = \dfrac{y-y_2}{s_2},\ \text{aber } \sin\varphi_3 = -\dfrac{y-y_3}{s_3}. \end{cases}$$

Damit ein Maximum oder ein Minimum eintreten kann, muß also

$$(30.)\quad f_1(x, y) = p\cos\varphi_1 + q\cos\varphi_2 - r\cos\varphi_3 = 0,$$

$$(31.)\quad f_2(x, y) = p\sin\varphi_1 + q\sin\varphi_2 - r\sin\varphi_3 = 0$$

sein. Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$(32.)\quad p : \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = q : \sin(\varphi_3 - \varphi_1) = r : \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Nun ist aber

$$\varphi_2 - \varphi_3 = \sphericalangle S_3PP_2 = 180^0 - \sphericalangle P_2PP_3,$$
$$\varphi_3 - \varphi_1 = \sphericalangle P_1PS_3 = 180^0 - \sphericalangle P_3PP_1,$$
$$\varphi_2 - \varphi_1 = \sphericalangle P_1PP_2,$$

folglich geht Gleichung (32.) über in

$$(33.)\quad p : \sin P_2PP_3 = q : \sin P_3PP_1 = r : \sin P_1PP_2.$$

Dieses Resultat stimmt mit der Lösung überein, welche in § 65 (Seite 339 bis 342) von dieser Aufgabe gegeben wurde. Dort sind außer der Konstruktion des Punktes P auch die Bedingungen erläutert worden, unter welchen der Punkt P die verlangte Eigenschaft des Minimums besitzt. Um aber die in § 165 beschriebene Methode einzuüben, beachte man, daß nach den Gleichungen (28.) und (29.)

$$(34.)\quad s_1s_2s_3f_{11} = ps_2s_3\sin^2\varphi_1 + qs_3s_1\sin^2\varphi_2 + rs_1s_2\sin^2\varphi_3 > 0,$$

$$(35.)\quad s_1s_2s_3f_{12} = -ps_2s_3\sin\varphi_1\cos\varphi_1 - qs_3s_1\sin\varphi_2\cos\varphi_2 - rs_1s_2\sin\varphi_3\cos\varphi_3,$$

$$(36.)\quad s_1s_2s_3f_{22} = ps_2s_3\cos^2\varphi_1 + qs_3s_1\cos^2\varphi_2 + rs_1s_2\cos^2\varphi_3$$

wird. Daraus findet man mit Rücksicht auf Gleichung (32.)

---

bildet, während bei φ_1 und φ_2 die Strecken in Betracht kommen, die von P_1 bezw. P_2 nach P gerichtet sind. Dadurch erklärt sich in den Gleichungen (29.) das Minuszeichen bei $\cos\varphi_3$ und $\sin\varphi_3$.

$$(37.)\quad s_1 s_2 s_3 (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) = qrs_1 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) + rps_2 \sin^2(\varphi_3 - \varphi_1)$$
$$+ pqs_3 \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{qr}{p}(ps_1 + qs_2 + rs_3)\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3) > 0,$$

folglich wird $f(x, y)$ ein *Minimum*.

Aufgabe 5. Durch die Gleichungen

$$(38.)\quad x = m_1 z + \mu_1, \quad y = n_1 z + \nu_1,$$
$$(39.)\quad x = m_2 z + \mu_2, \quad y = n_2 z + \nu_2$$

sind zwei Gerade g_1 und g_2 im Raume gegeben; man soll den kürzesten Abstand P_1P_2 zwischen g_1 und g_2 ermitteln.

Auflösung. Die Funktion, welche ein Minimum werden soll, ist

$$(40.)\quad \overline{P_1P_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

wobei

$$x_1 = m_1 z_1 + \mu_1, \quad y_1 = n_1 z_1 + \nu_1,$$
$$x_2 = m_2 z_2 + \mu_2, \quad y_2 = n_2 z_2 + \nu_2$$

ist, folglich wird

$$(41.)\quad \begin{cases} x_1 - x_2 = m_1 z_1 - m_2 z_2 + \mu_1 - \mu_2, \\ y_1 - y_2 = n_1 z_1 - n_2 z_2 + \nu_1 - \nu_2; \end{cases}$$

dies gibt

$$(42.)\quad \overline{P_1P_2}^2 = F(z_1, z_2)$$
$$= (m_1 z_1 - m_2 z_2 + \mu_1 - \mu_2)^2 + (n_1 z_1 - n_2 z_2 + \nu_1 - \nu_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Damit diese Funktion ein Minimum wird, muß also

$$(43.)\quad F_1(z_1, z_2)$$
$$= 2(m_1 z_1 - m_2 z_2 + \mu_1 - \mu_2)m_1 + 2(n_1 z_1 - n_2 z_2 + \nu_1 - \nu_2)n_1$$
$$+ 2(z_1 - z_2) = 0$$

und

$$(44.)\quad F_2(z_1, z_2)$$
$$= -2(m_1 z_1 - m_2 z_2 + \mu_1 - \mu_2)m_2 - 2(n_1 z_1 - n_2 z_2 + \nu_1 - \nu_2)n_2$$
$$- 2(z_1 - z_2) = 0$$

sein. Diese Gleichungen kann man auf die Form

$$(43\text{a.})\quad (m_1^2 + n_1^2 + 1)z_1 - (m_1 m_2 + n_1 n_2 + 1)z_2 + m_1(\mu_1 - \mu_2)$$
$$+ n_1(\nu_1 - \nu_2) = 0,$$

$$(44a.)\quad (m_1m_2+n_1n_2+1)z_1-(m_2^2+n_2^2+1)z_2+m_2(\mu_1-\mu_2)$$
$$+n_2(\nu_1-\nu_2)=0$$

bringen und findet daraus, wenn man

$$(45.)\quad (m_1^2+n_1^2+1)(m_2^2+n_2^2+1)-(m_1m_2+n_1n_2+1)^2$$
$$=(m_1-m_2)^2+(n_1-n_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2=D$$

setzt,

$$(46.)\quad D.z_1=-[(m_1-m_2)+n_2(m_1n_2-m_2n_1)](\mu_1-\mu_2)$$
$$-[(n_1-n_2)-m_2(m_1n_2-m_2n_1)](\nu_1-\nu_2),$$

$$(47.)\quad D.z_2=-[(m_1-m_2)+n_1(m_1n_2-m_2n_1)](\mu_1-\mu_2)$$
$$-[(n_1-n_2)-m_1(m_1n_2-m_2n_1)](\nu_1-\nu_2).$$

Für diese Werte von z_1 und z_2 wird $F(z_1, z_2)$ auch wirklich ein Minimum, denn aus den Gleichungen (43.) und (44.) findet man

$$(48.)\quad F_{11}=2(m_1^2+n_1^2+1),\quad F_{12}=-2(m_1m_2+n_1n_2+1),$$
$$F_{22}=2(m_2^2+n_2^2+1),$$

folglich ist

$$(49.)\qquad F_{11}>0\quad\text{und}\quad F_{11}F_{22}-F_{12}^2=4D>0.$$

Um den kürzesten Abstand P_1P_2 selbst zu berechnen, bilde man zunächst

$$(50.)\quad D(z_1-z_2)$$
$$=(m_1n_2-m_2n_1)[-(m_1-m_2)(\nu_1-\nu_2)+(n_1-n_2)(\mu_1-\mu_2)]$$

und beachte, daß man mit Rücksicht auf die Gleichungen (41.) die Gleichungen (43.) und (44.) auf die Form

$$(51.)\quad \begin{cases} m_1(x_1-x_2)+n_1(y_1-y_2)+(z_1-z_2)=0,\\ m_2(x_1-x_2)+n_2(y_1-y_2)+(z_1-z_2)=0\end{cases}$$

bringen kann. Daraus folgt

$$(52.)\qquad (m_1n_2-m_2n_1)(x_1-x_2)=(n_1-n_2)(z_1-z_2),$$

$$(53.)\qquad (m_1n_2-m_2n_1)(y_1-y_2)=-(m_1-m_2)(z_1-z_2);$$

dies gibt

$$(54.)\quad \overline{P_1P_2}^2$$
$$=\frac{(z_1-z_2)^2}{(m_1n_2-m_2n_1)^2}[(n_1-n_2)^2+(m_1-m_2)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2]$$
$$=\frac{D(z_1-z_2)^2}{(m_1n_2-m_2n_1)^2}=\frac{[(m_1-m_2)(\nu_1-\nu_2)-(n_1-n_2)(\mu_1-\mu_2)]^2}{D},$$

also

$$(55.)\quad P_1P_2 = \pm \frac{(m_1 - m_2)(\nu_1 - \nu_2) - (n_1 - n_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2 + (m_1n_2 - m_2n_1)^2}}.$$

Die beiden Geraden g_1 und g_2 schneiden sich, wenn der Zähler dieses Ausdruckes gleich Null ist.

§ 169.

Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

(Vgl. die Formel-Tabelle Nr. 273.)

Bisher war immer die Voraussetzung gemacht worden, daß in der Funktion

$$(1.)\quad u = f(x_1,\ x_2, \ldots x_n),$$

welche ein Maximum oder ein Minimum werden soll, die n Veränderlichen voneinander *unabhängig* sind. Das wird aber bei den wenigsten Aufgaben der Fall sein. Soll man z. B. die Zahl a so in drei Teile teilen, daß das Produkt dieser Teile ein Maximum wird, so ist die Funktion, welche ein Maximum werden soll,

$$(2.)\quad u = xyz,$$

wo zwischen den drei Veränderlichen die Bedingungsgleichung

$$(3.)\quad x + y + z = a$$

besteht. Diese Aufgabe wurde in dem vorhergehenden Paragraphen so gelöst, daß man aus Gleichung (3.) den Wert von z berechnete und in die Gleichung (2.) einsetzte.

Dadurch erhält man

$$(4.)\quad u = xy(a - x - y) = f(x,\ y),$$

also eine Funktion, welche nur noch die beiden unabhängigen Veränderlichen x und y enthält.

In ähnlicher Weise kann man häufig zum Ziele kommen. Soll z. B. in die Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

ein Dreieck $P_1P_2P_3$ mit möglichst großem Flächeninhalte einbeschrieben werden, so hängt die Funktion

$$(5.)\quad 2F = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2),$$

welche ein Maximum werden soll, von *sechs* Veränderlichen $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ ab. Diese sind aber nicht voneinander unabhängig, sondern sie müssen den drei Gleichungen

$$(6.)\quad b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,\quad b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2,\quad b^2x_3^2+a^2y_3^2=a^2b^2$$

genügen, damit die drei Punkte P_1, P_2, P_3 auf der Ellipse liegen. Jetzt kann man aber aus den Gleichungen (6.) die Werte von y_1, y_2, y_3 bezw. als Funktionen von x_1, x_2, x_3 ausrechnen und in den Ausdruck für $2F$ einsetzen. Dann hat man nur noch eine Funktion von *drei unabhängigen* Veränderlichen x_1, x_2, x_3, welche ein Maximum werden soll.

In den meisten Fällen wird aber eine derartige Elimination viel zu umständlich sein, als daß man an ihre Ausführung denken könnte. Dagegen führt die folgende Methode im allgemeinen viel leichter zum Ziele.

Es sei wieder

$$(7.)\qquad u=f(x_1,\ x_2,\ldots x_n)$$

die Funktion, welche ein Maximum oder ein Minimum werden soll. Dabei seien die n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ den m Bedingungsgleichungen

$$(8.)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1,\ x_2,\ldots x_n)=0, \\ \varphi_2(x_1,\ x_2,\ldots x_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1,\ x_2,\ldots x_n)=0 \end{cases}$$

unterworfen, wobei aber $m<n$ sein muß.

Zunächst erkennt man, daß hier das früher (§ 167) angegebene Verfahren nicht mehr anwendbar ist. Entwickelt man nämlich $f(x_1+h_1,\ x_2+h_2,\ldots x_n+h_n)$ nach steigenden Potenzen von $h_1, h_2, \ldots h_n$, so erhält man allerdings wieder

$$\begin{aligned} \varDelta &= f(x_1+h_1,\ x_2+h_2,\ldots x_n+h_n)-f(x_1,\ x_2,\ldots x_n) \\ &= f_1h_1+f_2h_2+\cdots+f_nh_n+[h_1, h_2,\ldots h_n]_2. \end{aligned}$$

Wollte man jetzt aber

$$h_2=0,\ h_3=0,\ldots h_n=0 \quad \text{und } h_1 \gtrless 0$$

setzen und daraus schließen, daß $f_1=0$ sein muß, so würde

man einen Fehler begehen, weil ja nur solche Werte von $h_1, h_2, \ldots h_n$ in Betracht kommen dürfen, für welche auch die Gleichungen

$$(9.)\quad \begin{cases} \varphi_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) = 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Von den Größen $h_1, h_2, \ldots h_n$ sind daher nur $n - m$, z. B. $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots h_n$ *willkürlich*, während sich die Werte der m übrigen $(h_1, h_2, \ldots h_m)$ aus den m Gleichungen (9.) ergeben.

Man kann aber trotzdem ein Verfahren finden, das dem früher angegebenen sehr ähnlich ist. Setzt man nämlich

$$(10.)\quad F(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ noch ganz beliebige Größen sind, so ist es gleichgültig, ob man das Maximum, bezw. das Minimum

der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

oder der Funktion $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$

aufsucht, da doch nur solche Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ in Betracht kommen, für welche die Gleichungen (8.) befriedigt werden. Man kann jetzt aber noch über die m Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ passend verfügen und dadurch den Umstand, daß die Größen $h_1, h_2, \ldots h_m$ von den Größen $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots h_n$ abhängig sind, ausgleichen. Um nämlich die Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu finden, für welche $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein Maximum oder ein Minimum wird, muß man wieder

$$(11.)\quad \Delta = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots x_n + h_n) - F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

nach Potenzen von $h_1, h_2, \ldots h_n$ entwickeln. Dies geschieht nach der *Taylor*schen Reihe, und zwar erhält man

$$(12.)\quad \Delta = F_1h_1 + F_2h_2 + \cdots + F_nh_n + [h_1, h_2, \ldots h_n]_2,$$

wobei die ersten partiellen Ableitungen von $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. mit $F_1, F_2, \ldots F_n$ und der Rest mit $[h_1, h_2, \ldots h_n]_2$ bezeichnet sind. Damit nun $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein *Minimum* wird, muß Δ für alle *zulässigen*, hinreichend

kleinen Werte der Größen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *beständig positiv* sein; und damit $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein *Maximum* wird, muß Δ für alle *zulässigen*, hinreichend kleinen Werte der Größen $h_1, h_2, \ldots h_n$ *beständig negativ* sein.

Bezeichnet man jetzt

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} \quad \text{mit} \quad \varphi_{\alpha\beta},$$

wobei α alle Werte von 1 bis m und β alle Werte von 1 bis n annehmen darf, so kann man die m Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ so bestimmen, daß die m *linearen* Gleichungen

$$(13.)\quad \begin{cases} F_1 = f_1 + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{21} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m1} = 0, \\ F_2 = f_2 + \lambda_1\varphi_{12} + \lambda_2\varphi_{22} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m = f_m + \lambda_1\varphi_{1m} + \lambda_2\varphi_{2m} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mm} = 0 \end{cases}$$

befriedigt werden. Dadurch geht Gleichung (12.) über in

$$(14.)\quad \Delta = F_{m+1}h_{m+1} + F_{m+2}h_{m+2} + \cdots + F_n h_n + [h_1, h_2, \ldots h_n]_2.$$

Da nun $h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots h_n$ willkürlich sind, so kann man

$$h_{m+2} = 0, \ldots h_n = 0$$

setzen, so daß sich die Größe Δ auf

$$(15.)\quad \Delta = F_{m+1}h_{m+1} + [h_1, h_2, \ldots h_{m+1}, 0, \ldots 0]_2$$

reduziert. Macht man jetzt h_{m+1} hinreichend klein, so müssen auch $h_1, h_2, \ldots h_m$ beliebig klein werden, wenn die Gleichungen (9.) befriedigt werden sollen. Wäre also F_{m+1} von Null verschieden, so könnte man h_{m+1} so klein machen, daß, vom Vorzeichen abgesehen, $F_{m+1}h_{m+1}$ größer würde als $[h_1, h_2, \ldots h_{m+1}, 0, \ldots 0]_2$, daß also Δ dasselbe Vorzeichen hätte wie $F_{m+1}h_{m+1}$. Diese Größe *wechselt* aber das Vorzeichen zugleich mit h_{m+1}, folglich kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum eintreten, wenn

$$F_{m+1} = 0$$

ist. In derselben Weise kann man zeigen, daß auch

$$F_{m+2} = 0, \ldots F_n = 0$$

sein muß. Dies gibt zur Bestimmung der n Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ außer den m Gleichungen (8.) noch die $n - m$ Gleichungen

$$(16.)\quad \begin{cases} F_{m+1} = f_{m+1} + \lambda_1\varphi_{1,\,m+1} + \lambda_2\varphi_{2,\,m+1} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,\,m+1} = 0, \\ F_{m+2} = f_{m+2} + \lambda_1\varphi_{1,\,m+2} + \lambda_2\varphi_{2,\,m+2} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,\,m+2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n = f_n + \lambda_1\varphi_{1n} + \lambda_2\varphi_{2n} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mn} = 0. \end{cases}$$

Bei der Herleitung wurden allerdings die m Gleichungen (13.) zur Berechnung der m Größen $\lambda_1; \lambda_2, \ldots \lambda_m$ und die n Gleichungen (8.) und (16.) zur Berechnung der n Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ benutzt. Man ist aber natürlich an diese Reihenfolge in der Ausführung der Rechnungen nicht gebunden, sondern hat nach dem vorhergehenden im ganzen $m + n$ Gleichungen, nämlich die Gleichungen

$$(17.)\quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \\ f_1 + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{21} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n + \lambda_1\varphi_{1n} + \lambda_2\varphi_{2n} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mn} = 0, \end{cases}$$

die gerade zur Berechnung der $m + n$ Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m, x_1, x_2, \ldots x_n$ ausreichen.

Auf diese Weise findet man *alle* Wertsysteme der n Veränderlichen, für welche *möglicherweise* ein Maximum oder ein Minimum eintreten kann. Ob dann für ein so gefundenes Wertsystem *wirklich* ein Maximum oder ein Minimum eintritt, geht in vielen Fällen schon aus der Natur der Aufgabe hervor. Deshalb möge hier die etwas weitläufige Entwickelung eines allgemein gültigen Kriteriums übergangen werden.

§ 170.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Es soll das größte rechtwinklige Parallelepipedon gefunden werden, das einer *Kugel* mit dem Halbmesser a einbeschrieben werden kann.

Auflösung. Da der Mittelpunkt des Parallelepipedons zugleich auch der Mittelpunkt der Kugel sein muß, so ist

der Durchmesser der Kugel, nämlich $2a$, eine Diagonale des Parallelepipedons. Nennt man also drei aneinanderstoßende Kanten $2x$, $2y$, $2z$, so wird

$$V = f(x, y, z) = 8xyz \tag{1.}$$

die Funktion, welche ein Maximum werden soll, und

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{2.}$$

ist die Bedingung, welche zwischen den drei Veränderlichen stattfindet. In diesem Falle wird deshalb

$$F(x, y, z) = f + \lambda\varphi = 8xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2), \tag{3.}$$

$$F_1 = 8yz + 2\lambda x = 0, \quad F_2 = 8zx + 2\lambda y = 0, \quad F_3 = 8xy + 2\lambda z = 0. \tag{4.}$$

Dies gibt

$$-\frac{\lambda}{4} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} = \frac{xy}{z}, \tag{5.}$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (2.)

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{a^2}{3}, \quad \text{oder} \quad x = y = z = \frac{a}{3}\sqrt{3}. \tag{6.}$$

Der *Würfel* ist daher das größte rechtwinklige Parallelepipedon, welches der Kugel einbeschrieben werden kann.

Aufgabe 2. Es soll das größte rechtwinklige Parallelepipedon gefunden werden, welches dem Ellipsoid

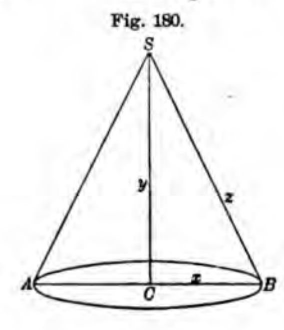
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{7.}$$

einbeschrieben werden kann.

Auflösung. In ähnlicher Weise wie bei der vorigen Aufgabe findet man hier für die halben Seitenkanten die Werte

$$x = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \quad y = \frac{b}{3}\sqrt{3}, \quad z = \frac{c}{3}\sqrt{3}. \tag{8.}$$

Fig. 180.



Aufgabe 3. Unter allen Kegeln mit gleichem Volumen V denjenigen zu finden, welcher die kleinste Oberfläche hat.

Auflösung. Der Halbmesser der Grundfläche sei x, die Höhe sei y, und die Seitenkante sei z (vgl. Fig. 180); dann wird die Gesamtoberfläche

(9.) $$O = x^2\pi + xz\pi, \quad \text{also} \quad f(x, y, z) = x^2 + xz.$$

Dies ist die Funktion, welche ein Minimum werden soll. Zwischen x, y und z bestehen dabei noch die Bedingungsgleichungen

(10.) $$V = \frac{x^2\pi y}{3}, \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

oder

(10a.) $$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 3V - x^2\pi y = 0, \\ \varphi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

Dies gibt

(11.) $$F(x, y, z) = x^2 + xz + \lambda_1(3V - x^2\pi y) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z^2),$$

(12.) $$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 2x + z - 2\lambda_1\pi xy + 2\lambda_2 x = 0, \\ F_2(x, y, z) = \quad - \lambda_1\pi x^2 + 2\lambda_2 y = 0, \\ F_3(x, y, z) = x \quad - 2\lambda_2 z = 0. \end{cases}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen findet man

(13.) $$\lambda_2 = \frac{x}{2z}, \quad \lambda_1\pi = \frac{y}{xz}, \quad x^2 + 2xz + z^2 = 2y^2,$$

oder

(14.) $$x + z = y\sqrt{2},$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (10.) erhält man daher

$$z^2 - x^2 = y^2, \quad \text{oder} \quad (z + x)(z - x) = y^2,$$

also

$$y\sqrt{2}(z - x) = y^2, \quad \text{oder} \quad z - x = \frac{y}{\sqrt{2}},$$

oder wenn man noch Gleichung (14) beachtet,

(15.) $$z = \frac{3y}{2\sqrt{2}}, \quad x = \frac{y}{2\sqrt{2}}, \quad V = \frac{y^3\pi}{8 \cdot 3},$$

folglich wird

(16.) $$x\sqrt{2} = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}, \quad y = 2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}, \quad z\sqrt{2} = 3x\sqrt{2} = 3\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}.$$

Die Gesamtoberfläche dieses Kegels ist dann

(17.) $$O = 4x^2\pi = 2\sqrt[3]{9V^2\pi}.$$

Aufgabe 4. Von einem Viereck sind die vier Seiten a, b, c, d gegeben; wie groß müssen die Winkel sein, damit der Flächeninhalt ein Maximum wird? (Vgl. Fig. 181.)

Auflösung. Ist $ABCD$ das gesuchte Viereck, und setzt man

$$\sphericalangle ABC = x, \quad \sphericalangle ADC = y,$$

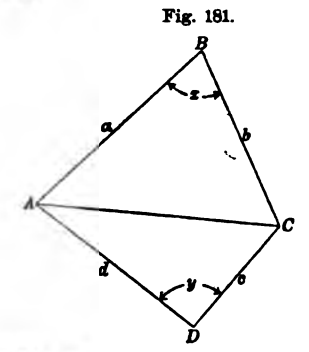
so wird

$$2\triangle ABC = ab\sin x, \quad 2\triangle ADC = cd\sin y,$$

also

$$2F = f(x, y) = ab\sin x + cd\sin y. \tag{18.}$$

Fig. 181.



Dies ist die Funktion, welche ein Maximum werden soll; dabei sind aber x und y nicht voneinander unabhängig, denn nach dem Kosinussatz wird

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos x,$$

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos y,$$

dies gibt

$$\varphi(x, y) = a^2 + b^2 - 2ab\cos x - c^2 - d^2 + 2cd\cos y = 0. \tag{19.}$$

Setzt man daher

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

so erhält man

$$\begin{cases} F_1(x, y) = ab\cos x + 2ab\lambda\sin x = 0, \\ F_2(x, y) = cd\cos y - 2cd\lambda\sin y = 0, \end{cases} \tag{20.}$$

oder

$$\cos x + 2\lambda\sin x = 0, \quad \cos y - 2\lambda\sin y = 0, \tag{21.}$$

und wenn man λ eliminiert,

$$\sin y\cos x + \sin x\cos y = \sin(x + y) = 0. \tag{22.}$$

Da jeder der beiden Winkel x und y größer als 0^0 und kleiner als 180^0 sein muß, so kann diese Gleichung nur befriedigt werden für

$$x + y = 180^0. \tag{23.}$$

Wenn von einem Viereck die vier Seiten gegeben sind, so ist also der Flächeninhalt dann ein Maximum, wenn das Viereck einem Kreise einbeschrieben ist.

Den Wert von x findet man jetzt ohne weiteres aus Gleichung (19.), weil $\cos y$ gleich $-\cos x$ ist. Dies gibt

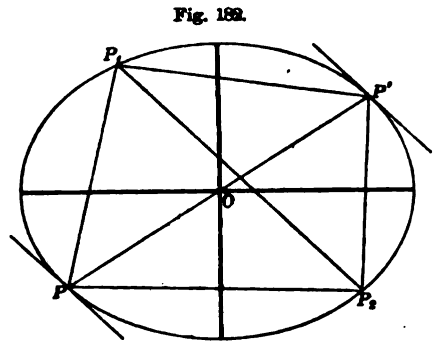
$$(24.)\qquad \cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Aufgabe 5. Auf einer Ellipse mit der Gleichung

$$(25.)\qquad \varphi(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

sind zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben; man soll auf der Ellipse einen dritten Punkt P bestimmen, so daß der Flächeninhalt des Dreiecks P_1P_2P möglichst groß wird. (Vgl. Fig. 182.)

Fig. 182.



Auflösung. Bezeichnet man die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, P bezw. mit x_1, y_1; x_2, y_2; x, y, so wird bekanntlich der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks P_1P_2P

$$(26.)\qquad 2F = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 = f(x, y).$$

Dies ist die Funktion, welche ein Maximum werden soll. Zwischen den beiden Veränderlichen x und y besteht dabei noch die Gleichung (25.), da der Punkt P auf der Ellipse liegen soll. Deshalb ist hier

$$(27.)\qquad F(x, y) = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 \\ + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2),$$

$$(28.)\qquad \begin{cases} F_1(x, y) = y_1 - y_2 + 2\lambda b^2x = 0, \\ F_2(x, y) = x_2 - x_1 + 2\lambda a^2y = 0. \end{cases}$$

Dies gibt durch Elimination von λ

$$(29.)\qquad b^2(x_1 - x_2)x + a^2(y_1 - y_2)y = 0.$$

Da die Punkte P_1 und P_2 auch auf der Ellipse liegen, so gelten die Gleichungen

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2 = 0 \quad \text{und} \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 - a^2b^2 = 0,$$

folglich ist auch

$$(30.)\qquad b^2(x_1^2 - x_2^2) + a^2(y_1^2 - y_2^2) = 0;$$

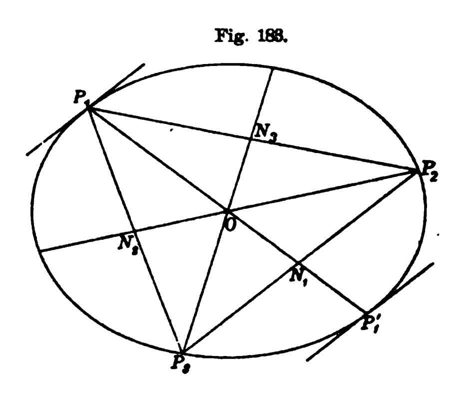
d. h. die Gleichung (29.) wird befriedigt für

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{31.}$$

und stellt deshalb einen Durchmesser dar, welcher die Sehne P_1P_2 halbiert. Nennt man die Endpunkte dieses Durchmessers P und P', so haben diese beiden Punkte die verlangte Eigenschaft des Maximums, denn nach der Lehre von den konjugierten Durchmessern sind die Tangenten in P und P' zu P_1P_2 parallel. In dem Dreieck P_1P_2P (und ebenso in dem Dreieck P_1P_2P') ist deshalb die Höhe größer als in einem jeden Dreieck P_1P_2P'', welches dieselbe Grundlinie P_1P_2 hat, dessen Spitze P'' aber auf der Ellipse dem Punkte P (bezw. dem Punkte P') benachbart liegt.

Aufgabe 6. In eine Ellipse soll ein möglichst großes Dreieck $P_1P_2P_3$ einbeschrieben werden. (Vgl. Fig. 183.)

Fig. 183.



Auflösung. Diese Aufgabe läßt sich unmittelbar auf die vorhergehende zurückführen, indem man z. B. die Punkte P_1 und P_2 als gegeben ansieht und den Punkt P_3 sucht. Die Verlängerung des Halbmessers OP_3 muß daher die Sehne P_1P_2 halbieren. Ebenso muß die Verlängerung von OP_1 die Gerade P_2P_3, und die Verlängerung von OP_2 die Gerade P_3P_1 halbieren, d. h. der *Mittelpunkt* O der Ellipse ist gleichzeitig der *Schwerpunkt* des gesuchten Dreiecks $P_1P_2P_3$.

Da in jedem Dreieck der Schwerpunkt die drei Halbierungstransversalen im Verhältnis von $1:2$ teilt, so kann man ein solches Dreieck $P_1P_2P_3$ konstruieren, indem man auf der Ellipse einen Punkt P_1 beliebig annimmt, den Halbmesser OP_1 über O bis N_1 verlängert, so daß

$$P_1O = 2ON_1 \tag{32.}$$

wird, und durch N_1 eine Parallele zu der Tangente im

Punkte P_1 zieht; dann schneidet diese Parallele die Ellipse in zwei Punkten P_2 und P_3, so daß das Dreieck $P_1P_2P_3$ seinen Schwerpunkt in O hat. Dabei sind nach der Lehre von den konjugierten Durchmessern die Koordinaten des Punktes N_1

$$-\frac{x_1}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad -\frac{y_1}{2} = \frac{y_2 + y_3}{2},$$

folglich gelten die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0. \tag{33.}$$

Da bei dieser Konstruktion der Punkt P_1 noch ganz beliebig auf der Ellipse angenommen werden durfte, so findet man hierdurch *unendlich viele* Dreiecke, von denen aber sogleich gezeigt werden soll, daß sie alle *gleichen* Flächeninhalt haben. Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ wird nämlich mit Rücksicht auf die Gleichungen (33.)

$$\begin{aligned} 2F &= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \\ &= 3(x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned} \tag{34.}$$

Da die Punkte P_1 und P_2 auf der Ellipse liegen, gelten die Gleichungen

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2, \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2,$$

welche durch Multiplikation die Gleichung

$$b^4x_1^2x_2^2 + a^4y_1^2y_2^2 + a^2b^2(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) = a^4b^4 \tag{35.}$$

geben. Ferner hat die Tangente im Punkte P_1 die Gleichung

$$b^2x_1x' + a^2y_1y' - a^2b^2 = 0,$$

folglich ist die Gleichung der Geraden, welche man durch N_1 parallel zu dieser Tangente legt,

$$2b^2x_1x' + 2a^2y_1y' + a^2b^2 = 0. \tag{36.}$$

Da diese Gerade durch den Punkt P_2 hindurchgeht, so wird

$$2b^2x_1x_2 + 2a^2y_1y_2 = -a^2b^2,$$

und wenn man beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat erhebt,

$$4b^4x_1^2x_2^2 + 8a^2b^2x_1x_2y_1y_2 + 4a^4y_1^2y_2^2 = a^4b^4, \tag{37.}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (35.)

$$4a^4b^4 - 4a^2b^2(x_1{}^2y_2{}^2 + x_2{}^2y_1{}^2) + 8a^2b^2x_1x_2y_1y_2 = a^4b^4,$$

oder

(38.) $4(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = 3a^2b^2, \quad 2(x_1y_2 - x_2y_1) = ab\sqrt{3}.$

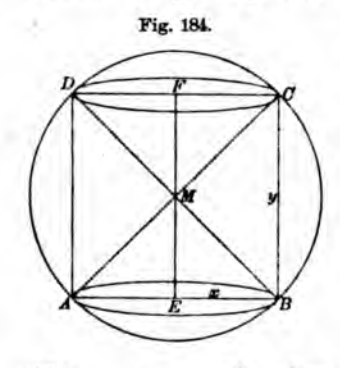
Dies gibt mit Rücksicht auf Gleichung (34.)

(39.) $$4F = 3ab\sqrt{3}.$$

Der Flächeninhalt ist also unabhängig von der Lage des Punktes P_1, so daß es *unendlich viele* Dreiecke $P_1P_2P_3$ gibt, welche *gleichen* Inhalt besitzen, und welche *größer* sind als alle übrigen der Ellipse einbeschriebenen Dreiecke.

Aufgabe 7. In eine Kugel mit dem Halbmesser a soll ein Zylinder mit möglichst großer Oberfläche einbeschrieben werden. (Vgl. Fig. 184.)

Fig. 184.



Auflösung. Bezeichnet man die Halbmesser der Grundkreise mit x und die Höhe des Zylinders mit y, so wird die Oberfläche

(40.) $$F = 2x^2\pi + 2xy\pi,$$

also

(41.) $$f(x, y) = x^2 + xy,$$

wobei noch zwischen x und y die Gleichung

(42.) $$\varphi(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$$

besteht. Daraus folgt

(43.) $$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

(44.) $$\begin{cases} F_1(x, y) = 2x + y + 8\lambda x = 0, \\ F_2(x, y) = \quad\quad x + 2\lambda y = 0, \end{cases}$$

(45.) $$2xy + y^2 - 4x^2 = 0,$$

oder

(45a.) $$(x + y)^2 = 5x^2, \quad y = x(-1 \pm \sqrt{5}).$$

Da x und y beide positiv sein müssen, so kann hierbei nur das obere Vorzeichen gelten. Es wird also

(45b.) $$y = x(-1 + \sqrt{5}),$$

und mit Rücksicht auf Gleichung (42.)

$$x^2(10 - 2\sqrt{5}) = 4a^2, \quad 20x^2 = a^2(10 + 2\sqrt{5}), \tag{46.}$$

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}, \quad y = a\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}; \tag{47.}$$

$$f(x, y) = x(x + y) = x^2\sqrt{5} = \frac{a^2}{2}(\sqrt{5} + 1). \tag{48.}$$

Dasselbe Resultat war bereits in § 65, Aufgabe 27 (Seite 346 und 347) gefunden worden.

Aufgabe 8. Durch den Mittelpunkt O eines Ellipsoids

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{49.}$$

ist eine Ebene

$$\varphi_2(x, y, z) = Ax + By + Cz = 0 \tag{50.}$$

gelegt; man soll die Achsen der von dieser Ebene ausgeschnittenen Ellipse bestimmen.

Auflösung. Verbindet man einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve mit O, so wird

$$\overline{OP}^2 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \tag{51.}$$

wobei die Veränderlichen x, y, z den Gleichungen (49.) und (50.) genügen müssen. Unter diesen Halbmessern OP ist die *große* Halbachse ein *Maximum* und die *kleine* Halbachse ein *Minimum*. Man findet daher die beiden Achsen, indem man die Werte von x, y, z bestimmt, für welche $f(x, y, z)$ ein Maximum oder ein Minimum wird. Hierbei ist

$$F(x, y, z) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2, \tag{52.}$$

$$F_1 = 2x + \frac{2\lambda_1 x}{a^2} + A\lambda_2 = 0, \tag{53.}$$

$$F_2 = 2y + \frac{2\lambda_1 y}{b^2} + B\lambda_2 = 0, \tag{54.}$$

$$F_3 = 2z + \frac{2\lambda_1 z}{c^2} + C\lambda_2 = 0, \tag{55.}$$

also

$$2x = -\frac{A\lambda_2 a^2}{a^2 + \lambda_1}, \quad 2y = -\frac{B\lambda_2 b^2}{b^2 + \lambda_1}, \quad 2z = -\frac{C\lambda_2 c^2}{c^2 + \lambda_1}. \tag{56.}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (50.) und (49.) folgt hieraus

$$\frac{A^2a^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{B^2b^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{C^2c^2}{c^2+\lambda_1}=0, \tag{57.}$$

$$\lambda_2{}^2\left[\frac{A^2a^2}{(a^2+\lambda_1)^2}+\frac{B^2b^2}{(b^2+\lambda_1)^2}+\frac{C^2c^2}{(c^2+\lambda_1)^2}\right]=4. \tag{58.}$$

Aus Gleichung (57.) findet man die beiden Werte von λ_1 und aus Gleichung (58.) die zugehörigen Werte von λ_2. Indem man diese Werte von λ_1 und λ_2 in die Gleichungen (56.) einsetzt, erhält man schließlich die gesuchten Werte von x, y, z.

Gleichung (57.) kann man auf die Form

$$\begin{aligned}(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2)\lambda_1{}^2 \\ +[A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(c^2+a^2)+C^2c^2(a^2+b^2)]\lambda_1 \\ +(A^2+B^2+C^2)a^2b^2c^2=0\end{aligned} \tag{59.}$$

bringen. Diese quadratische Gleichung hat zwei *gleiche* Wurzeln, wenn

$$\begin{aligned}[A^2a^2(b^2+c^2)+B^2b^2(c^2+a^2)+C^2c^2(a^2+b^2)]^2 \\ -4(A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2)(A^2+B^2+C^2)a^2b^2c^2=0\end{aligned} \tag{60.}$$

ist. Wird diese Gleichung befriedigt, so werden auch die Achsen der zugehörigen Ellipse einander gleich, d. h. die Ebene $Ax+By+Cz=0$ schneidet aus dem Ellipsoid einen Kreis aus.

Jetzt kann man aber Gleichung (60.) auf die Form

$$\begin{aligned}A^4a^4(b^2-c^2)^2+B^4b^4(c^2-a^2)^2+C^4c^4(a^2-b^2)^2 \\ +2B^2C^2b^2c^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)+2C^2A^2c^2a^2(b^2-c^2)(b^2-a^2) \\ +2A^2B^2a^2b^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)=0,\end{aligned} \tag{60a.}$$

oder

$$\begin{aligned}[A^2a^2(b^2-c^2)-C^2c^2(a^2-b^2)]^2+B^2b^2(a^2-c^2)[B^2b^2(a^2-c^2) \\ +2A^2a^2(b^2-c^2)+2C^2c^2(a^2-b^2)]=0\end{aligned} \tag{60b.}$$

bringen. Unter der Voraussetzung, daß $a^2>b^2>c^2>0$ ist, sind beide Glieder auf der linken Seite dieser Gleichung positiv, oder mindestens gleich Null; die Gleichung kann

also nur befriedigt werden, wenn die beiden Glieder einzeln gleich Null sind. Dies gibt

(61.) $$A^2a^2(b^2 - c^2) = C^2c^2(a^2 - b^2) \quad \text{und} \quad B = 0,$$

oder

(62.) $$\frac{A}{C} = \pm\sqrt{\frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2(b^2 - c^2)}}, \quad B = 0.$$

Durch die beiden Ebenen

(63.) $$x\sqrt{c^2(a^2 - b^2)} \pm z\sqrt{a^2(b^2 - c^2)} = 0$$

werden also Kreise aus dem Ellipsoid ausgeschnitten. Dasselbe gilt von allen Ebenen, die zu einer dieser Ebenen parallel sind und das Ellipsoid in einer reellen Kurve schneiden.

Tafel für die Beziehung zwischen dem transcendenten Winkel ϑ und dem gemeinsamen Winkel u.

Grad ϑ	$u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]$ *)						Grad ϑ	$u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right]$ *)					
	0′	10′	20′	30′	40′	50′		0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,0000	0,0029	0,0058	0,0087	0,0116	0,0145	45	8814	8855	8896	8938	8979	9021
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	46	0,9063	0,9105	0,9147	0,9189	0,9231	0,9274
2	0349	0378	0407	0436	0466	0495	47	0,9316	0,9359	0,9402	0,9445	0,9488	0,9531
3	0524	0553	0582	0611	0640	0670	48	0,9575	0,9618	0,9662	0,9706	0,9750	0,9794
4	0699	0728	0757	0786	0815	0845	49	0,9838	0,9882	0,9927	0,9972	1,0017	1,0062
5	0874	0903	0932	0961	0991	1020	50	1,0107	1,0152	1,0198	1,0243	1,0289	1,0335
6	1049	1078	1108	1137	1166	1195	51	0381	0428	0474	0521	0567	0614
7	1225	1254	1283	1313	1342	1371	52	0662	0709	0756	0804	0852	0900
8	1401	1430	1460	1489	1518	1548	53	0948	0997	1045	1094	1143	1194
9	1577	1607	1636	1666	1695	1725	54	1242	1291	1341	1391	1441	1492
10	0,1754	0,1784	0,1813	0,1843	0,1873	0,1902	55	1542	1593	1644	1695	1747	1799
11	1932	1961	1991	2021	2050	2080	56	1851	1903	1955	2008	2060	2113
12	2110	2140	2169	2199	2229	2259	57	2167	2220	2274	2328	2382	2437
13	2289	2319	2348	2378	2408	2438	58	2492	2547	2602	2657	2713	2769
14	2468	2498	2528	2558	2588	2618	59	2826	2882	2939	2996	3054	3111
15	2648	2679	2709	2739	2769	2799	60	1,3170	1,3228	1,3287	1,3345	1,3405	1,3461
16	2830	2860	2890	2920	2951	2981	61	3524	3584	3645	3705	3767	3828
17	3012	3042	3072	3103	3133	3164	62	3890	3952	4014	4077	4140	4204
18	3195	3225	3256	3286	3317	3348	63	4268	4332	4397	4462	4527	4593
19	3379	3409	3440	3471	3502	3533	64	4659	4726	4793	4860	4928	4995
20	0,3564	0,3595	0,3626	0,3657	0,3688	0,3719	65	5065	5134	5203	5273	5343	5414
21	3750	3781	3813	3844	3875	3906	66	5485	5557	5629	5702	5775	5849
22	3938	3969	4001	4032	4064	4095	67	5923	5998	6073	6149	6225	6302
23	4127	4158	4190	4222	4253	4285	68	6379	6457	6536	6615	6695	6775
24	4317	4349	4381	4413	4445	4477	69	6856	6937	7019	7102	7185	7269
25	4509	4541	4573	4605	4637	4670	70	1,7354	1,7440	1,7526	1,7612	1,7700	1,7788
26	4702	4735	4767	4799	4832	4865	71	1,7877	1,7967	1,8057	1,8149	1,8241	1,8334
27	4897	4930	4963	4995	5028	5061	72	1,8427	1,8522	1,8617	1,8714	1,8811	1,8900
28	5094	5127	5160	5193	5226	5259	73	1,9008	1,9108	1,9209	1,9311	1,9414	1,9518
29	5293	5326	5359	5393	5426	5460	74	1,9623	1,9729	1,9836	1,9944	2,0054	2,0164
30	0,5493	0,5527	0,5560	0,5594	0,5628	0,5662	75	2,0276	2,0389	2,0503	2,0619	2,0736	2,0854
31	5696	5730	5764	5798	5832	5866	76	2,0973	2,1094	2,1217	2,1340	2,1466	2,1593
32	5900	5935	5969	6004	6038	6073	77	2,1721	2,1851	2,1983	2,2117	2,2252	2,2383
33	6107	6142	6177	6212	6247	6282	78	2,2528	2,2660	2,2812	2,2957	2,3104	2,3253
34	6317	6352	6387	6422	6457	6493	79	2,3404	2,3558	2,3714	2,3872	2,4033	2,4196
35	6528	6564	6600	6635	6671	6707	80	2,4362	2,4531	2,4703	2,4878	2,5056	2,5237
36	6743	6779	6815	6851	6887	6923	81	2,5421	2,5609	2,5800	2,5995	2,6193	2,6396
37	6960	6996	7033	7070	7106	7143	82	2,6603	2,6814	2,7030	2,7250	2,7476	2,7705
38	7180	7217	7254	7291	7328	7366	83	2,7942	2,8184	2,8431	2,8685	2,8945	2,9212
39	7403	7440	7478	7516	7553	7591	84	2,9487	2,9769	3,0060	3.0359	3.0667	3,0985
40	0,7629	0,7667	0,7705	0,7743	0,7782	0,7820	85	3,1313	3,1652	3.2004	3.2368	3.2746	3,3138
41	7859	7897	7936	7975	8014	8053	86	3,3547	3.3973	3.4417	3.4883	3.5371	3,5884
42	8092	8131	8170	8210	8249	8289	87	3,6425	3,6997	3.7604	3.8249	3.8939	3,9681
43	8328	8368	8408	8448	8488	8529	88	4,0481	4,1352	4.2305	4,3359	4.4536	4,5879
44	8569	8610	8650	8691	8732	8773	89	4.7413	4.9237	5,1468	5.4345	5.8400	6,5331
45	8814	8855	8896	8938	8979	9021	90	∞					

*) Aus den Gleichungen

$\mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg}\vartheta, \quad \mathfrak{Cos}\, u = \sec\vartheta$ (vergl. Formel Nr. 81 der Tabelle)

folgt

$$e^u = \mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = \frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right), \quad \text{oder} \quad u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right].$$

[Vgl. § 31, Gl. (10.)]

Tafel für die hyperbolische Funktion

Sin u = tg ϑ für $u = 0$ bis $u = 5{,}09$*).

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0701	0801	0901	101
0,1	0,1002	1102	1203	1304	1405	1506	1607	1708	1810	1911	102
0,2	0,2013	2115	2218	2320	2423	2526	2629	2733	2837	2941	104
0,3	0,3045	3150	3255	3360	3466	3572	3678	3785	3892	4000	108
0,4	0,4108	4216	4325	4434	4543	4653	4764	4875	4986	5098	113
0,5	0,5211	5324	5438	5552	5666	5782	5897	6014	6131	6248	119
0,6	0,6367	6485	6605	6725	6846	6967	7090	7213	7336	7461	125
0,7	0,7586	7712	7838	7966	8094	8223	8353	8484	8615	8748	133
0,8	0,8881	9015	9150	9286	9423	9561	9700	9840	9981	0122*	143
0,9	1,0265	0409	0554	0700	0847	0995	1144	1294	1446	1598	154
1,0	1,1752	1007	2063	2220	2379	2539	2700	2862	3025	3190	166
1,1	1,3356	3524	3693	3863	4035	4208	4382	4558	4735	4914	181
1,2	1,5095	5276	5460	5645	5831	6019	6209	6400	6593	6788	196
1,3	1,6984	7182	7381	7583	7786	7991	8198	8406	8617	8829	214
1,4	1,9043	9259	9477	9697	9919	0143*	0369*	0597*	0827*	1059*	234
1,5	2,1293	1529	1768	2008	2251	2496	2743	2993	3245	3499	257
1,6	2,3756	4015	4276	4540	4806	5075	5346	5620	5896	6175	281
1,7	2,6456	6740	7027	7317	7609	7904	8202	8503	8806	9112	310
1,8	2,9422	9734	0049*	0367*	0689*	1013*	1340*	1671*	2005*	2341*	341
1,9	3,2682	3025	3372	3722	4075	4432	4792	5156	5523	5894	375
2,0	3,6269	6647	7028	7414	7803	8196	8593	8993	9398	9806	413
2,1	4,0219	0635	1056	1480	1909	2342	2779	3221	3666	4116	455
2,2	4,4571	5030	5494	5962	6434	6912	7394	7880	8372	8868	502
2,3	4,9370	9876	0387*	0903*	1425*	1951*	2483*	3020*	3562*	4109*	553
2,4	5,4662	5221	5785	6354	6929	7510	8097	8689	9288	9892	610
2,5	6,0502	1118	1741	2369	3004	3645	4293	4946	5607	6274	673
2,6	6,6947	7628	8315	9008	9709	0417*	1132*	1854*	2583*	3319*	744
2,7	7,4063	4814	5572	6338	7112	7894	8683	9480	0285*	1008*	821
2,8	8,1919	2749	3586	4432	5287	6150	7021	7902	8791	9689	907
2,9	9,0596	1512	2437	3371	4315	5268	6231	7203	8185	9177	1002
3,0	10,0179	1191	2212	3245	4287	5340	6403	7477	8562	9658	1107
3,1	11,0765	1882	3011	4151	5303	6466	7641	8827	0026*	1236*	1223
3,2	12,2459	3694	4941	6200	7473	8758	0056*	1367*	2691*	4028*	1351
3,3	13,5379	6743	8121	9513	0918*	2338*	3772*	5221*	6684*	8161*	1493
3,4	14,965	15,116	15,268	15,422	15,577	15,734	15,893	16,053	16,214	16,378	165
3,5	16,543	16,709	16,877	17,047	17,219	17,392	17,567	17,744	17,923	18,103	182
3,6	18,285	18,470	18,655	18,843	19,033	19,224	19,418	19,613	19,811	20,010	201
3,7	20,211	20,415	20,620	20,828	21,037	21,249	21,463	21,679	21,897	22,117	222
3,8	22,339	22,564	22,791	23,020	23,252	23,486	23,722	23,961	24,202	24,445	246
3,9	24,691	24,939	25,190	25,444	25,700	25,958	26,219	26,483	26,749	27,018	272
4,0	27,290	27,564	27,842	28,122	28,404	28,690	28,979	29,270	29,564	29,862	300
4,1	30,162	30,465	30,772	31,081	31,393	31,709	32,028	32,350	32,675	33,004	332
4,2	33,336	33,671	34,009	34,351	34,697	35,046	35,398	35,754	36,113	36,476	367
4,3	36,843	37,214	37,588	37,966	38,347	38,733	39,122	39,515	39,913	40,314	405
4,4	40,719	41,129	41,542	41,960	42,382	42,808	43,238	43,673	44,112	44,555	448
4,5	45,003	45,455	45,912	46,374	46,840	47,311	47,787	48,267	48,752	49,242	495
4,6	49,737	50,237	50,742	51,252	51,767	52,288	52,813	53,344	53,880	54,422	547
4,7	54,969	55,522	56,080	56,643	57,213	57,788	58,369	58,955	59,548	60,147	604
4,8	60,751	61,362	61,979	62,601	63,231	63,866	64,508	65,157	65,812	66,473	668
4,9	67,141	67,816	68,498	69,186	69,882	70,584	71,293	72,010	72,734	73,465	738
5,0	74,203	74,949	75,702	76,463	77,232	78,008	78,792	79,584	80,384	81,192	816

*) Die hier folgenden Tafeln sind entnommen aus *Ligowski*, Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn in Berlin.

Eine graphische Darstellung der Funktion y = Sin x gibt Figur 185 auf Seite 810. (Einheit gleich ½ cm.)

Tafel für die hyperbolische Funktion

$\mathfrak{Cof}\, u = \sec \vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 5{,}09$*).

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0.0	1,0000	0001	0002	0005	0008	0013	0018	0025	0032	0041	9
0,1	1,0050	0061	0072	0085	0098	0113	0128	0145	0162	0181	20
0,2	1,0201	0221	0243	0266	0289	0314	0340	0367	0395	0423	30
0,3	1,0453	0484	0516	0549	0584	0619	0655	0692	0731	0770	41
0,4	1,0811	0852	0895	0939	0984	1030	1077	1125	1174	1225	51
0,5	1,1276	1329	1383	1438	1494	1551	1609	1669	1730	1792	63
0,6	1,1855	1919	1984	2051	2119	2188	2258	2330	2402	2476	76
0,7	1,2552	2628	2706	2785	2865	2947	3030	3114	3199	3286	88
0,8	1,3374	3464	3555	3647	3740	3835	3932	4029	4128	4229	102
0,9	1,4331	4434	4539	4645	4753	4862	4973	5085	5199	5314	117
1,0	1,5431	5549	5669	5790	5913	6038	6164	6292	6421	6552	133
1,1	1,6685	6820	6956	7093	7233	7374	7517	7662	7808	7957	151
1,2	1,8107	8258	8412	8568	8725	8884	9045	9208	9373	9540	169
1,3	1,9709	9880	0053*	0228*	0404*	0583*	0764*	0947*	1132*	1320*	189
1,4	2,1509	1700	1894	2090	2288	2488	2691	2896	3103	3312	212
1,5	2,3524	3738	3955	4174	4395	4619	4845	5073	5305	5538	237
1,6	2,5775	6013	6255	6499	6746	6995	7247	7502	7760	8020	263
1,7	2,8283	8549	8818	9090	9364	9642	9922	0206*	0492*	0782*	293
1,8	3,1075	1371	1669	1972	2277	2585	2897	3212	3530	3852	325
1,9	3,4177	4506	4838	5173	5512	5855	6201	6551	6904	7261	361
2,0	3,7622	7987	8355	8727	9103	9483	9867	0255*	0647*	1043*	400
2,1	4,1443	1847	2256	2669	3085	3507	3932	4362	4797	5236	443
2,2	4,5679	6127	6580	7037	7499	7966	8437	8914	9395	9881	491
2,3	5,0372	0868	1370	1876	2388	2905	3427	3954	4487	5026	543
2,4	5,5569	6119	6674	7235	7801	8373	8951	9535	0125*	0721*	602
2,5	6,1323	1931	2545	3166	3793	4426	5066	5712	6365	7024	666
2,6	6,7690	8363	9043	9729	0423*	1123*	1831*	2546*	3268*	3998*	737
2,7	7,4735	5479	6231	6991	7758	8533	9316	0106*	0905*	1712*	815
2,8	8,2527	3351	4182	5022	5871	6728	7594	8469	9352	0244*	902
2,9	9,1146	2056	2976	3905	4844	5791	6749	7716	8693	9680	997
3,0	10,0677	1683	2700	3728	4765	5814	6872	7942	9022	0113*	1102
3,1	11,1215	2328	3453	4588	5736	6895	8065	9247	0442*	1648*	1218
3,2	12,2866	4097	5340	6596	7864	9146	0440*	1747*	3067*	4401*	1347
3,3	13,5748	7108	8483	9871	1273*	2689*	4120*	5565*	7024*	8498*	1489
3,4	14,999	15,149	15,301	15,455	15,610	15,766	15,924	16,084	16,245	16,408	165
3,5	16,573	16,739	16,907	17,077	17,248	17,421	17,596	17,772	17,951	18,131	180
3,6	18,313	18,497	18,682	18,870	19,059	19,250	19,444	19,639	19,836	20,035	201
3,7	20,236	20,439	20,644	20,852	21,061	21,272	21,486	21,702	21,919	22,139	223
3,8	22,362	22,586	22,813	23,042	23,273	23,507	23,743	23,982	24,222	24,466	245
3,9	24,711	24,959	25,210	25,463	25,719	25,977	26,238	26,502	26,768	27,037	271
4,0	27,308	27,582	27,860	28,139	28,422	28,707	28,996	29,287	29,581	29,878	300
4,1	30,178	30,482	30,788	31,097	31,409	31,725	32,044	32,365	32,691	33,019	332
4,2	33,351	33,686	34,024	34,366	34,711	35,060	35,412	35,768	36,127	36,490	367
4,3	36,857	37,227	37,601	37,979	38,360	38,746	39,135	39,528	39,925	40,326	406
4,4	40,732	41,141	41,554	41,972	42,393	42,819	43,250	43,684	44,123	44,566	448
4,5	45,014	45,466	45,923	46,385	46,851	47,321	47,797	48,277	48,762	49,252	495
4,6	49,747	50,247	50,752	51,262	51,777	52,297	52,823	53,354	53,890	54,431	547
4,7	54,978	55,531	56,089	56,652	57,221	57,796	58,377	58,964	59,556	60,155	604
4,8	60,759	61,370	61,987	62,609	63,239	63,874	64,516	65,164	65,819	66,481	668
4,9	67,149	67,823	68,505	69,193	69,889	70,591	71,300	72,017	72,741	73,472	738
5,0	74,210	74,956	75,709	76,470	77,238	78,014	78,798	79,590	80,390	81,198	816

*) Eine graphische Darstellung der Funktion $y = \mathfrak{Cof}\, x$ gibt Figur 186 auf Seite 810. (Einheit gleich $\frac{3}{8}$ cm.)

Tafel für die *Briggs*'schen Logarithmen der hyperbolischen Funktion

$\mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg} \vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 5{,}09$; um 10 vergrößert.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	− ∞	8,0000	3011	4772	6022	6992	7781	8455	9036	9548	459
0,1	9,0007	0423	0802	1152	1475	1777	2060	2325	2576	2814	225
0,2	9,3039	3254	3459	3656	3844	4025	4199	4366	4528	4685	151
0,3	9,4836	4983	5125	5264	5398	5529	5656	5781	5902	6020	116
0,4	9,6136	6249	6359	6468	6574	6678	6780	6880	6978	7074	95
0,5	9,7169	7262	7354	7444	7533	7620	7707	7791	7875	7958	81
0,6	9,8039	8119	8199	8277	8354	8431	8506	8581	8655	8728	72
0,7	9,8800	8872	8942	9012	9082	9150	9218	9286	9353ᵉ	9419	66
0,8	9,9485	9550	9614	9678	9742	9805	9868	9930	9992	0053*	61
0,9	10,0114	0174	0234	0294	0353	0412	0470	0529	0586	0644	57
1,0	10,0701	0758	0815	0871	0927	0982	1038	1093	1148	1203	54
1,1	10,1257	1311	1365	1419	1472	1525	1578	1631	1684	1736	52
1,2	10,1788	1840	1892	1944	1995	2046	2098	2148	2199	2250	50
1,3	10,2300	2351	2401	2451	2501	2551	2600	2650	2699	2748	49
1,4	10,2797	2846	2895	2944	2993	3041	3090	3138	3186	3234	48
1,5	10,3282	3330	3378	3426	3474	3521	3569	3616	3663	3711	47
1,6	10,3758	3805	3852	3899	3946	3992	4039	4086	4132	4179	46
1,7	10,4225	4272	4318	4364	4411	4457	4503	4549	4595	4641	46
1,8	10,4687	4733	4778	4824	4870	4915	4961	5007	5052	5098	45
1,9	10,5143	5188	5234	5279	5324	5370	5415	5460	5505	5550	45
2,0	10,5595	5640	5685	5730	5775	5820	5865	5910	5955	6000	44
2,1	10,6044	6089	6134	6178	6223	6268	6312	6357	6401	6446	45
2,2	10,6491	6535	6580	6624	6668	6713	6757	6802	6846	6890	45
2,3	10,6935	6979	7023	7067	7112	7156	7200	7244	7289	7333	44
2,4	10,7377	7421	7465	7509	7553	7597	7642	7686	7730	7774	44
2,5	10,7818	7862	7906	7950	7994	8038	8082	8126	8169	8213	44
2,6	10,8257	8301	8345	8389	8433	8477	8521	8564	8608	8652	44
2,7	10,8696	8740	8784	8827	8871	8915	8959	9003	9046	9090	44
2,8	10,9134	9178	9221	9265	9309	9353	9396	9440	9484	9527	44
2,9	10,9571	9615	9658	9702	9746	9789	9833	9877	9920	9964	44
3,0	11,0008	0051	0095	0139	0182	0226	0270	0313	0357	0400	44
3,1	11,0444	0488	0531	0575	0618	0662	0706	0749	0793	0836	44
3,2	11,0880	0923	0967	1011	1054	1098	1141	1185	1228	1272	44
3,3	11,1316	1359	1403	1446	1490	1533	1577	1620	1664	1707	44
3,4	11,1751	1794	1838	1881	1925	1968	2012	2056	2099	2143	43
3,5	11,2186	2230	2273	2317	2360	2404	2447	2491	2534	2578	43
3,6	11,2621	2665	2708	2752	2795	2839	2882	2925	2969	3012	44
3,7	11,3056	3099	3143	3186	3230	3273	3317	3360	3404	3447	44
3,8	11,3491	3534	3578	3621	3665	3708	3752	3795	3838	3882	43
3,9	11,3925	3969	4012	4056	4099	4143	4186	4230	4273	4317	43
4,0	11,4360	4403	4447	4490	4534	4577	4621	4664	4708	4751	44
4,1	11,4795	4838	4881	4925	4968	5012	5055	5099	5142	5186	43
4,2	11,5229	5273	5316	5359	5403	5446	5490	5533	5577	5620	44
4,3	11,5664	5707	5750	5794	5837	5881	5924	5968	6011	6055	43
4,4	11,6098	6141	6185	6228	6272	6315	6359	6402	6446	6489	43
4,5	11,6532	6576	6619	6663	6706	6750	6793	6836	6880	6923	44
4,6	11,6967	7010	7054	7097	7141	7184	7227	7271	7314	7358	43
4,7	11,7401	7445	7488	7531	7575	7618	7662	7705	7749	7792	44
4,8	11,7836	7879	7922	7966	8009	8053	8096	8140	8183	8226	44
4,9	11,8270	8313	8357	8400	8444	8487	8530	8574	8617	8661	43
5,0	11,8704	8748	8791	8835	8878	8921	8965	9008	9052	9095	43

Tafel für die *Briggs*'schen Logarithmen der hyperbolischen Funktion

Cof $u = \sec \vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 5,09$.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0014	0018	4
0,1	0,0022	0026	0031	0037	0042	0049	0055	0062	0070	0078	8
0,2	0,0086	0095	0104	0114	0124	0134	0145	0156	0168	0180	13
0,3	0,0193	0205	0219	0232	0246	0261	0276	0291	0306	0322	17
0,4	0,0339	0355	0372	0390	0407	0426	0444	0463	0482	0502	20
0,5	0,0522	0542	0562	0583	0605	0626	0648	0670	0693	0716	23
0,6	0,0739	0762	0786	0810	0835	0859	0884	0910	0935	0961	26
0,7	0,0987	1013	1040	1067	1094	1122	1149	1177	1206	1234	29
0,8	0,1263	1292	1321	1350	1380	1410	1440	1470	1501	1532	31
0,9	0,1563	1594	1625	1657	1689	1721	1753	1785	1818	1851	33
1,0	0,1884	1917	1950	1984	2018	2051	2086	2120	2154	2189	34
1,1	0,2223	2258	2293	2328	2364	2399	2435	2470	2506	2542	36
1,2	0,2578	2615	2651	2688	2724	2761	2798	2835	2872	2909	38
1,3	0,2947	2984	3022	3059	3097	3135	3173	3211	3249	3288	38
1,4	0,3326	3365	3403	3442	3481	3520	3559	3598	3637	3676	39
1,5	0,3715	3754	3794	3833	3873	3913	3952	3992	4032	4072	40
1,6	0,4112	4152	4192	4232	4273	4313	4353	4394	4434	4475	40
1,7	0,4515	4556	4597	4637	4678	4719	4760	4801	4842	4883	41
1,8	0,4924	4965	5006	5048	5089	5130	5172	5213	5254	5296	41
1,9	0,5337	5379	5421	5462	5504	5545	5587	5629	5671	5713	41
2,0	0,5754	5796	5838	5880	5922	5964	6006	6048	6090	6132	43
2,1	0,6175	6217	6259	6301	6343	6386	6428	6470	6512	6555	42
2,2	0,6597	6640	6682	6724	6767	6809	6852	6894	6937	6979	43
2,3	0,7022	7064	7107	7150	7192	7235	7278	7320	7363	7406	42
2,4	0,7448	7491	7534	7577	7619	7662	7705	7748	7791	7833	43
2,5	0,7876	7919	7962	8005	8048	8091	8134	8176	8219	8262	43
2,6	0,8305	8348	8391	8434	8477	8520	8563	8606	8649	8692	43
2,7	0,8735	8778	8821	8864	8907	8951	8994	9037	9080	9123	43
2,8	0,9166	9209	9252	9295	9338	9382	9425	9468	9511	9554	43
2,9	0,9597	9641	9684	9727	9770	9813	9856	9900	9943	9986	43
3,0	1,0029	0073	0116	0159	0202	0245	0289	0332	0375	0418	44
3,1	1,0462	0505	0548	0591	0635	0678	0721	0764	0808	0851	43
3,2	1,0894	0938	0981	1024	1067	1111	1154	1197	1241	1284	43
3,3	1,1327	1371	1414	1457	1501	1544	1587	1631	1674	1717	44
3,4	1,1761	1804	1847	1891	1934	1977	2021	2064	2107	2151	43
3,5	1,2194	2237	2281	2324	2367	2411	2454	2497	2541	2584	44
3,6	1,2628	2671	2714	2758	2801	2844	2888	2931	2974	3018	43
3,7	1,3061	3105	3148	3191	3235	3278	3322	3365	3408	3452	43
3,8	1,3495	3538	3582	3625	3669	3712	3755	3799	3842	3886	43
3,9	1,3929	3972	4016	4059	4103	4146	4189	4233	4276	4320	43
4,0	1,4363	4406	4450	4493	4537	4580	4623	4667	4710	4754	43
4,1	1,4797	4840	4884	4927	4971	5014	5057	5101	5144	5188	43
4,2	1,5231	5274	5318	5361	5405	5448	5492	5535	5578	5622	43
4,3	1,5665	5709	5752	5795	5839	5882	5926	5969	6012	6056	43
4,4	1,6099	6143	6186	6230	6273	6316	6360	6403	6447	6490	43
4,5	1,6533	6577	6620	6664	6707	6751	6794	5837	6881	6924	44
4,6	1,6968	7011	7055	7098	7141	7185	7228	7272	7315	7358	44
4,7	1,7402	7445	7489	7532	7576	7619	7662	7706	7749	7793	43
4,8	1,7836	7880	7923	7969	8010	8053	8097	8140	8184	8227	43
4,9	1,8270	8314	8357	8401	8444	8487	8531	8574	8618	8661	44
5,0	1,8705	8748	8791	8835	8878	8922	8965	0096	9052	9095	43

Tafel für die hyperbolische Funktion

$\mathfrak{Tg}\, u = \sin \vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 2{,}39$*).

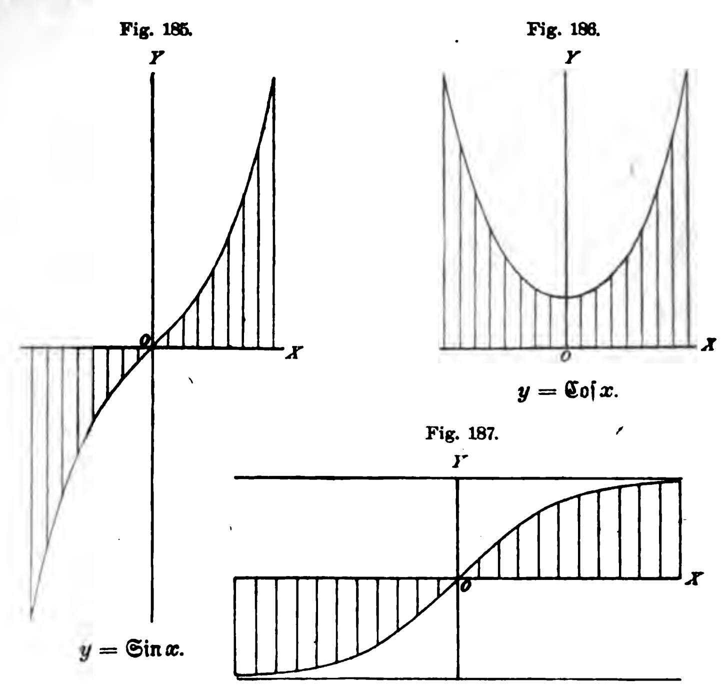
u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	0,0000	0100	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0798	0898	99
0,1	0,0997	1096	1194	1293	1391	1489	1587	1684	1781	1878	96
0,2	0,1974	2070	2165	2260	2355	2449	2543	2636	2729	2821	92
0,3	0,2913	3004	3095	3185	3275	3364	3452	3540	3627	3714	86
0,4	0,3800	3885	3969	4053	4137	4219	4301	4382	4462	4542	79
0,5	0,4621	4700	4777	4854	4930	5005	5080	5154	5227	5299	71
0,6	0,5370	5441	5511	5581	5649	5717	5784	5850	5915	5980	64
0,7	0,6044	6107	6169	6231	6291	6352	6411	6469	6527	6584	56
0,8	0,6640	6696	6751	6805	6858	6911	6963	7014	7064	7114	49
0,9	0,7163	7211	7259	7306	7352	7398	7443	7487	7531	7574	42
1,0	0,7616	7658	7699	7739	7779	7818	7857	7895	7932	7969	36
1,1	0,8005	8041	8076	8110	8144	8178	8210	8243	8275	8306	31
1,2	0,8337	8367	8397	8426	8455	8483	8511	8538	8565	8591	26
1,3	0,8617	8643	8668	8693	8717	8741	8764	8787	8810	8832	22
1,4	0,8854	8875	8896	8917	8937	8957	8977	8996	9015	9033	19
1,5	0,9052	9069	9087	9104	9121	9138	9154	9170	9186	9202	15
1,6	0,9217	9232	9246	9261	9275	9289	9302	9316	9329	9342	12
1,7	0,9354	9367	9379	9391	9402	9414	9425	9436	9447	9458	10
1,8	0,9468	9478	9488	9498	9508	9518	9527	9536	9545	9554	8
1,9	0,9562	9571	9579	9587	9595	9603	9611	9619	9626	9633	7
2,0	0,9640	9647	9654	9661	9668	9674	9680	9687	9693	9699	6
2,1	0,9705	9710	9716	9722	9727	9732	9738	9743	9748	9753	4
2,2	0,9757	9762	9767	9771	9776	9780	9785	9789	9793	9797	4
2,3	0,9801	9805	9809	9812	9816	9820	9823	9827	9830	9834	3

Tafel für die *Briggs*'schen Logarithmen der hyperbolischen Funktion

$\mathfrak{Tg}\, u = \sin \vartheta$ für $u = 0$ bis $u = 2{,}39$; um 10 vergrößert.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
0,0	— ∞	8,0000	3010	4770	6018	6986	7776	8444	9022	9531	455
0,1	8,9986	0396*	0771*	1115	1433*	1729*	2004*	2263*	2506*	2736*	217
0,2	9,2953	3159	3355	3542	3720	3890	4053	4210	4360	4505	139
0,3	9,4644	4778	4907	5031	5152	5268	5381	5490	5596	5698	99
0,4	9,5797	5894	5987	6078	6166	6252	6336	6417	6496	6573	75
0,5	9,6648	6720	6792	6861	6928	6994	7058	7121	7182	7242	58
0,6	9,7300	7357	7413	7467	7520	7571	7622	7671	7720	7767	46
0,7	9,7813	7858	7902	7945	7988	8029	8069	8109	8147	8185	37
0,8	9,8222	8258	8293	8328	8362	8395	8428	8459	8491	8521	30
0,9	9,8551	8580	8609	8637	8664	8691	8717	8743	8768	8793	24
1,0	9,8817	8841	8864	8887	8909	8931	8952	8973	8994	9014	20
1,1	9,9034	9053	9072	9090	9108	9126	9144	9161	9177	9194	16
1,2	9,9210	9226	9241	9256	9271	9285	9300	9314	9327	9341	13
1,3	9,9354	9367	9379	9391	9404	9415	9427	9438	9450	9460	11
1,4	9,9471	9482	9492	9502	9512	9522	9531	9540	9550	9558	9
1,5	9,9567	9576	9584	9592	9601	9608	9616	9624	9631	9639	7
1,6	9,9646	9653	9660	9666	9673	9679	9686	9692	9698	9704	6
1,7	9,9710	9716	9721	9727	9732	9738	9743	9748	9753	9758	5
1,8	9,9763	9767	9772	9776	9781	9785	9789	9794	9798	9802	4
1,9	9,9806	9810	9813	9817	9821	9824	9828	9831	9834	9838	3
2,0	9,9841	9844	9847	9850	9853	9856	9859	9862	9864	9867	3
2,1	9,9870	9872	9875	9877	9880	9882	9884	9887	9889	9891	2
2,2	9,9893	9895	9898	9900	9902	9904	9905	9907	9909	9911	2
2,3	9,9913	9914	9916	9918	9919	9921	9923	9924	9926	9927	2

*) Eine graphische Darstellung der Funktion $y = \mathfrak{Tg}\, x$ gibt Figur 187 auf Seite 810. (Einheit gleich $\frac{1}{2}$ cm.)



$y = \mathfrak{Sin}\, x$.

$y = \mathfrak{Cos}\, x$.

$y = \mathfrak{Tg}\, x$.

Die Ordinaten der einzelnen Kurvenpunkte sind:

Fig. 185.

x	y
0	0,0000
0,3	0,3045
0,6	0,6367
0,9	1,0265
1,2	1,5095
1,5	2,1293
1,8	2,9422
2,1	4,0219
2,4	5,4662

Fig. 186.

x	y
0	1,0000
0,3	1,0453
0,6	1,1855
0,9	1,4331
1,2	1,8107
1,5	2,3524
1,8	3,1075
2,1	4,1443
2,4	5,5569

Fig. 187.

x	y
0	0,0000
0,4	0,3948
0,8	0,7600
1,2	1,0740
1,6	1,3280
2,0	1,5232
2,4	1,6674
2,8	1,7708
3,2	1,8434
3,6	1,8936
4,0	1,9280
4,4	1,9514

wird ...

absoluter Betrag kleiner ...

6.) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots k}$. [§ 10, Gl. (...)]

7.) $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$. [§ 10, Gl. (2.)]

8.) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. [§ 10, Gl. (4.)]

9.) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. [§ 10, Gl. (5.)]




Stanford University Libraries
3 6105 002 011 406

Tabelle

der wichtigsten Formeln aus der Differential-Rechnung.

1.) $\lim\limits_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 1.$ [§ 5, Gl. (5.)]

2.) $\lim(X \pm Y) = \lim X \pm \lim Y.$ [§ 6, Gl. (1.)]

3.) $\lim(X \,.\, Y) = \lim X \,.\, \lim Y.$ [§ 6, Gl. (2.)]

4.) $\lim\left(\frac{X}{Y}\right) = \frac{\lim X}{\lim Y}$, wenn $\lim Y \gtrless 0$ ist. [§ 6, Gl. (3.)]

5.) Bezeichnet man mit ε eine gegebene (beliebig kleine) positive Größe, so heißt die Funktion

$$y = f(x)$$

stetig für $x = a$, wenn $f(a)$ einen bestimmten, endlichen Wert hat, und wenn man eine hinreichend kleine positive Größe δ so bestimmen kann, daß

$$|f(a+h) - f(a)| < \varepsilon$$

wird für alle positiven und negativen Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner ist als δ. [§ 9, Gl. (11.)]

6.) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{\dots}.$ [§ 10, Gl. (1.)]

7.) [§ 10, Gl. (2.)]

[§ 10, Gl. (4.)]

[§ 10, Gl. (5.)]



Die Formel Nr. 9 gilt nur unter der Voraussetzung, daß n eine positive, ganze Zahl ist.

10.) $$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{m-2}x^{m-2} + \binom{m}{m-1}x^{m-1} + \binom{m}{m}x^m$$
$$= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{2}x^{m-2} + \binom{m}{1}x^{m-1} + x^m.$$

[§ 10, Gl. (7.) und Gl. (11.)]

11.) $$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \cdots + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{1}ab^{m-1} + b^m.$$

[§ 10, Gl. (12.) und § 35, Gl. (5.)]

Bei den Formeln Nr. 10 und 11 wird vorausgesetzt, daß m eine *positive, ganze* Zahl ist.

12.) $$S = A + Aq + Aq^2 + \cdots + Aq^{n-1} = \frac{A(1-q^n)}{1-q}.$$

[§ 11, Gl. (1.) und (2.)]

12a.) Ist q ein positiver oder negativer echter Bruch, und wird n unendlich groß, so ist

$$S = A + Aq + Aq^2 + Aq^3 + \cdots = \frac{A}{1-q}.$$ [§ 11, Gl. (5.)]

13.) $$x_1^{n-1} + xx_1^{n-2} + x^2x_1^{n-3} + \cdots + x^{n-2}x_1 + x^{n-1} = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

[§ 11, Gl. (3.) und (4.)]

14.) $$e = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n=\infty} S_k + \lim_{n=\infty} S_k',$$

wo

$$\lim_{n=\infty} S_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!},$$

$$\lim_{n=\infty} S_k' < \frac{1}{k!\,k}, \quad \lim_{n=\infty} S_k < e < \lim_{n=\infty} S_k + \frac{1}{k!\,k}.$$

[§ 12, Gl. (2.), (5.), (7.), (11.) und (12.)]

15.) $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$
$$= 2{,}718\,281\,828\,459\ldots.$$ [§ 12, Gl. (13.) und (14.)]

16.) Die Ableitung (der Differential-Quotient) einer stetigen Funktion $y = f(x)$ ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x_1 = x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$= \lim_{x_1 = x} \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$ [§ 13, Gl. (5.), (5a.), (5b.) und (6.)]

17.) Ist α der Winkel, welchen die Tangente einer Kurve mit der positiven Richtung der X-Achse bildet, so wird

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f'(x),$$

wobei $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve, und x, y die Koordinaten des Berührungspunktes sind. [§ 14, Gl. (3.)]

18.) $$\frac{d(y + C)}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$ [§ 15, Gl. (1a.)]

19.) $$\frac{d(Ay)}{dx} = A\frac{dy}{dx}$$ [§ 15, Gl. (2a.)]

20.) $$\frac{d(u + v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}.$$ [§ 15, Gl. (3.)]

21.) $$\frac{d(u - v)}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}.$$ [§ 15, Gl. (4.)]

22.) $$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$ [§ 16, Gl. (6.) und Gl. (9.); § 17, Gl. (8.); § 22, Gl. (17a.), (22a.) und (26.)]

23.) $$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{\log e}{x}; \quad \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}.$$ [§ 19, Gl. (9.) und (9a.)]

24.) $$\log x = \frac{\ln x}{\ln(10)} = \ln x \,.\, \log e.$$ [§ 19, Gl. (13.) und (14.)]

25.) $$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x.$$ [§ 20, Gl. (8.)]

26.) $$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$ [§ 20, Gl. (15.)]

27.) $$\frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$ [§ 21, Gl. (6.)]

28.) $$\frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x).$$ [§ 21, Gl. (12.)]

29.) $\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$. [§ 22, Gl. (6a.)]

30.) $\frac{d(u_1 u_2 \ldots u_m)}{dx} =$

$$u_2 u_3 \ldots u_m \frac{du_1}{dx} + u_1 u_3 \ldots u_m \frac{du_2}{dx} + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_{m-1} \frac{du_m}{dx}.$$

[§ 22, Gl. (16.)]

30a.) $\frac{d(u^m)}{dx} = mu^{m-1}\frac{du}{dx}$. [§ 22, Gl. (17.), (22.) und (26.); § 24, Gl. (4.)]

31.) $\frac{d\sqrt{a^2+x^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$. [§ 22, Gl. (27.)]

32.) $\frac{d\sqrt{x^2-a^2}}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$. [§ 22, Gl. (27a.)]

33.) $\frac{d\sqrt{a^2-x^2}}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. [§ 22, Gl. (28.)]

34.) $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$. [§ 22, Gl. (34.) und (38a.)]

35.) $dy = df(x) = f'(x)dx$. [§ 23, Gl. (8.)]

36.) Ist

$$y = f(u) \quad \text{und} \quad u = \varphi(x),$$

so wird

$$du = \varphi'(x)dx, \quad dy = f'(u)du = f'(u)\varphi'(x)dx,$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$ [§ 23, Gl. (6.), (6a.) und (9.)]

37.) Aus $x = \varphi(y)$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}$. [§ 25, Gl. (4.)]

38.) $\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. [§ 25, Gl. (8a.)]

39.) $\frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. [§ 25, Gl. (12a.)]

40.) $\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$. [§ 25, Gl. (16a.)]

41.) $\dfrac{d(\operatorname{arcctg} x)}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}.$ [§ 25, Gl. (20a.)]

42.) $\dfrac{d(\operatorname{arcsec} x)}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$ [§ 25, Gl. (24a.)]

43.) $\dfrac{d(\operatorname{arccosec} x)}{dx} = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$ [§ 25, Gl. (28a.)]

44.) $\dfrac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a, \quad \dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x.$ [§ 25, Gl. (32a.) und (33.)]

45.) $\mathfrak{Cos}\, u = \dfrac{1}{2}(e^u + e^{-u}).$ [§ 27, Gl. (1.)]

46.) $\mathfrak{Sin}\, u = \dfrac{1}{2}(e^u - e^{-u}).$ [§ 27, Gl. (1.)]

47.) $\mathfrak{Tg}\, u = \dfrac{\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cos}\, u}, \quad \mathfrak{Ctg}\, u = \dfrac{\mathfrak{Cos}\, u}{\mathfrak{Sin}\, u}.$ [§ 27, Gl. (2.) und (3.)]

48.) $\mathfrak{Sec}\, u = \dfrac{1}{\mathfrak{Cos}\, u}, \quad \mathfrak{Cosec}\, u = \dfrac{1}{\mathfrak{Sin}\, u}.$ [§ 27, Gl. (4.)]

49.) $e^u = \dfrac{1 + \mathfrak{Tg}\left(\frac{u}{2}\right)}{1 - \mathfrak{Tg}\left(\frac{u}{2}\right)}.$ [§ 27, Gl. (5.)]

50.) $\mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Sin}\, u = e^u.$ [§ 27, Gl. (8.)]

51.) $\mathfrak{Cos}\, u - \mathfrak{Sin}\, u = e^{-u}.$ [§ 27, Gl. (9.)]

52.) $\mathfrak{Cos}^2 u - \mathfrak{Sin}^2 u = 1.$ [§ 27, Gl. (10.)]

52a.) $\mathfrak{Cos}^2 u = 1 + \mathfrak{Sin}^2 u, \quad \mathfrak{Sin}^2 u = \mathfrak{Cos}^2 u - 1.$ [§ 27, Gl. (11.) und (12.)]

53.) $\mathfrak{Sin}(2u) = 2\,\mathfrak{Sin}\, u\, \mathfrak{Cos}\, u.$ [§ 27, Gl. (13.)]

54.) $\mathfrak{Cos}(2u) = \mathfrak{Cos}^2 u + \mathfrak{Sin}^2 u = 2\,\mathfrak{Cos}^2 u - 1 = 1 + 2\,\mathfrak{Sin}^2 u.$ [§ 27, Gl. (14.) und (15.)]

55.) $\mathfrak{Sec}^2 u + \mathfrak{Tg}^2 u = 1.$ [§ 27, Gl. (16.)]

56.) $\mathfrak{Ctg}^2 u - \mathfrak{Cosec}^2 u = 1.$ [§ 27, Gl. (17.)]

57.) $\mathfrak{Sin}(2u) = \dfrac{2\,\mathfrak{Tg}\, u}{1 - \mathfrak{Tg}^2 u}.$ [§ 27, Gl. (19.)]

58.) $\mathfrak{Cos}(2u) = \dfrac{1 + \mathfrak{Tg}^2 u}{1 - \mathfrak{Tg}^2 u}.$ [§ 27, Gl. (20.)]

59.) $\mathfrak{Cos}(u + v) = \mathfrak{Cos}\, u \,.\, \mathfrak{Cos}\, v + \mathfrak{Sin}\, u \,.\, \mathfrak{Sin}\, v.$ [§ 27, Gl. (23.)]

60.) $\mathfrak{Cof}(u - v) = \mathfrak{Cof}\,u \,.\, \mathfrak{Cof}\,v - \mathfrak{Sin}\,u \,.\, \mathfrak{Sin}\,v.$ [§ 27, Gl. (24.)]

61.) $\mathfrak{Sin}(u + v) = \mathfrak{Sin}\,u \,.\, \mathfrak{Cof}\,v + \mathfrak{Cof}\,u \,.\, \mathfrak{Sin}\,v.$ [§ 27, Gl. (31.)]

62.) $\mathfrak{Sin}(u - v) = \mathfrak{Sin}\,u \,.\, \mathfrak{Cof}\,v - \mathfrak{Cof}\,u \,.\, \mathfrak{Sin}\,v.$ [§ 27, Gl. (32.)]

63.) $\mathfrak{Cof}\,a + \mathfrak{Cof}\,b = 2\mathfrak{Cof}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{a-b}{2}\right).$ [§ 27, Gl. (27.)]

64.) $\mathfrak{Cof}\,a - \mathfrak{Cof}\,b = 2\mathfrak{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right).$ [§ 27, Gl. (28.)]

65.) $\mathfrak{Sin}\,a + \mathfrak{Sin}\,b = 2\mathfrak{Sin}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{a-b}{2}\right).$ [§ 27, Gl. (33.)]

66.) $\mathfrak{Sin}\,a - \mathfrak{Sin}\,b = 2\mathfrak{Cof}\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{a-b}{2}\right).$ [§ 27, Gl. (34.)]

67.) $\mathfrak{Tg}\,a - \mathfrak{Tg}\,b = \frac{\mathfrak{Sin}(a-b)}{\mathfrak{Cof}\,a \,.\, \mathfrak{Cof}\,b}.$ [§ 27, Gl. (35.)]

68.) $\mathfrak{Ctg}\,a - \mathfrak{Ctg}\,b = -\frac{\mathfrak{Sin}(a-b)}{\mathfrak{Sin}\,a \,.\, \mathfrak{Sin}\,b}.$ [§ 27, Gl. (36.)]

69.) $\frac{d(\mathfrak{Cof}\,u)}{du} = \mathfrak{Sin}\,u.$ [§ 28, Gl. (3.)]

70.) $\frac{d(\mathfrak{Sin}\,u)}{du} = \mathfrak{Cof}\,u.$ [§ 28, Gl. (4.)]

71.) $\frac{d(\mathfrak{Tg}\,u)}{du} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 u} = 1 - \mathfrak{Tg}^2 u.$ [§ 28, Gl. (5.)]

72.) $\frac{d(\mathfrak{Ctg}\,u)}{du} = -\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2 u} = 1 - \mathfrak{Ctg}^2 u.$ [§ 28, Gl. (6.)]

73.) $x = \mathfrak{Cof}\,u$ ist gleichbedeutend mit

$u = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\,x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$

[§ 30, Gl. (7.), (7a.) und (18.)]

74.) $x = \mathfrak{Sin}\,u$ ist gleichbedeutend mit

$u = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\,x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$ [§ 30, Gl. (19.)]

75.) $x = \mathfrak{Tg}\,u$ ist gleichbedeutend mit

$u = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$ [§ 30, Gl. (20.)]

76.) $x = \mathfrak{Ctg}\,u$ ist gleichbedeutend mit

$u = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$ [§ 30, Gl. (21.)]

77.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,x)}{dx} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$ [§ 30, Gl. (22.)]

78.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$ [§ 30, Gl. (23.)]

79.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}.$ [§ 30, Gl. (24.)]

80.) $\dfrac{d(\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Ctg}\,x)}{dx} = \dfrac{1}{1-x^2}.$ [§ 30, Gl. (25.)]

81.) Setzt man

$$\mathfrak{Sin}\,u = \operatorname{tg}\vartheta,$$

so wird für $0 < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{Sin}\,u = \operatorname{tg}\vartheta, & \mathfrak{Tg}\,u = \sin\vartheta, \\ \mathfrak{Cof}\,u = \sec\vartheta, & \mathfrak{Sec}\,u = \cos\vartheta, \\ \mathfrak{Ctg}\,u = \operatorname{cosec}\vartheta, & \mathfrak{Cofec}\,u = \operatorname{ctg}\vartheta, \end{array}$$

$$u = \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\vartheta}{2}\right)\right].$$ [§ 31, Gl. (9.) und (12.)]

82.) $f''(x) = \dfrac{df'(x)}{dx},\ f'''(x) = \dfrac{df''(x)}{dx},\ \cdots f^{(n)}(x) = \dfrac{df^{(n-1)}(x)}{dx}.$

[§ 32, Gl. (2.) und (3.)]

82a.) $f''(x) = \lim\limits_{\Delta x=0}\dfrac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}.$ [§ 32, Gl. (7.)]

83.) $d^2y = d(dy) = f''(x)dx^2,$

$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3,$

. . . .

$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$ [§ 32, Gl. (11.) bis (14.)]

84.) $\dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x).$ [§ 32, Gl. (14a.)]

85.) $\dfrac{d^n(u\pm v)}{dx^n} = \dfrac{d^nu}{dx^n} \pm \dfrac{d^nv}{dx^n}.$ [§ 33, Aufgabe 13.]

86.) $\dfrac{d^n(uv)}{dx^n} = f(x)g^{(n)}(x) + \dbinom{n}{1}f'(x)g^{(n-1)}(x)$

$$+\binom{n}{2}f''(x)g^{(n-2)}(x)+\cdots+\binom{n}{1}f^{(n-1)}(x)g'(x)+f^{(n)}(x)g(x),$$

wenn $u = f(x)$, $v = g(x)$ ist. [§ 33, Aufgabe 14.]

87.) Sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $g(x)$ mit ihren ersten Ableitungen $\varphi'(x)$ und $g'(x)$ in dem Intervalle von a bis b reell und stetig, so gibt es zwischen a und b mindestens einen Wert von x, für welchen

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\varphi'(x)}{g'(x)} = \frac{\varphi'[a+\Theta(b-a)]}{g'[a+\Theta(b-a)]}$$

wird. Dabei ist $0 < \Theta < +1$. [§ 37, Gl. (6.) und (9.)]

88.) Sind die Funktionen $f(x)$ und $f'(x)$ im Intervalle von a bis $a+h$ stetig und endlich, so wird

$$f(a+h)-f(a) = h\,.\,f'(a+\Theta h),$$

oder

$$f(x)-f(a)=(x-a)\,.\,f'[a+\Theta(x-a)], \quad \text{wobei} \quad 0<\Theta<+1.$$

[§ 37, Gl. (17.) und (17a.)]

89.) Sind die Funktionen

$$\varphi(x),\ \varphi'(x),\ \varphi''(x),\ldots\varphi^{(n)}(x),\ \varphi^{(n+1)}(x),$$
$$g(x),\ g'(x),\ g''(x),\ldots g^{(n)}(x),\ g^{(n+1)}(x)$$

in dem Intervalle von a bis x reell und stetig, und ist

$$\varphi(a)=0,\ \varphi'(a)=0,\ \varphi''(a)=0,\ldots\varphi^{(n)}(a)=0,$$
$$g(a)=0,\ g'(a)=0,\ g''(a)=0,\ldots g^{(n)}(a)=0,$$

so wird

$$\frac{\varphi(x)}{g(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}[a+\Theta(x-a)]}{g^{(n+1)}[a+\Theta(x-a)]}, \quad \text{wobei} \quad 0<\Theta<+1.$$

[§ 38, Gl. (10.) und (15.)]

90.) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R,$$

wobei

$$R = \frac{f^{(n+1)}[a+\Theta_1(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
$$= \frac{1}{n!}\left\{f^{(n)}[a+\Theta_2(x-a)] - f^{(n)}(a)\right\}(x-a)^n$$
$$= \frac{f^{(n+1)}[a+\Theta_3(x-a)]}{n!}(1-\Theta_3)^n(x-a)^{n+1}$$
$$= \frac{f^{(n+1)}[a+\Theta_4(x-a)]}{\varkappa\,.\,n!}(1-\Theta_4)^{n-\varkappa+1}(x-a)^{n+1}.$$

Die Größen Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 liegen zwischen 0 und 1.

[§ 38, Gl. (24.) und (25.); § 43, Gl. (5.), (17.) und (31.)]

91.) $f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + R,$

wobei

$$R = \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_1 h)}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x+\Theta_2 h) - f^{(n)}(x)]h^n$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_3 h)}{n!}(1-\Theta_3)^n h^{n+1}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x+\Theta_4 h)}{\varkappa \, . \, n!}(1-\Theta_4)^{n-\varkappa+1} \, . \, h^{n+1}.$$

Die Größen Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 liegen zwischen 0 und 1.

[§ 38, Gl. (28.) und (29.); § 43, Gl. (3a.), (15.) und (30.)]

92.) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R,$

wobei

$$R = \frac{f^{(n+1)}(\Theta_1 x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(\Theta_2 x) - f^{(n)}(0)]x^n$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\Theta_3 x)}{n!}(1-\Theta_3)^n x^{n+1}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\Theta_4 x)}{\varkappa \, . \, n!}(1-\Theta_4)^{n-\varkappa+1} \, . \, x^{n+1}.$$

Die Größen Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 liegen zwischen 0 und 1.

[§ 39, Gl. (1.) und (2.); § 43, Gl. (7.), (19.) und (32.)]

92a.) $f(x) - f(0) = x \, . \, f'(\Theta x).$ [§ 39, Gl. (3.)]

93.) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$ [§ 40, Gl. (6.)]

94.) $\mathfrak{Cos}\, u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \cdots.$ [§ 40, Gl. (9.)]

95.) $\mathfrak{Sin}\, u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = \frac{u}{1!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \cdots.$ [§ 40, Gl. (10.)]

96.) $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \frac{x^4(\ln a)^4}{4!} + \cdots.$ [§ 40, Gl. (13.)]

97.) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots.$ [§ 41, Gl. (5.)]

98.) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots.$ [§ 41, Gl. (10.)]

In den Formeln 93 bis 98 dürfen x und u jeden beliebigen endlichen Wert haben.

99.) $(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \cdots$

für $-1 < x < +1$. [§ 44, Gl. (19.) und (20.)]

100.) $(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}b + \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \cdots$

für $|b| < |a|$. [§ 44, Gl. (31.)]

101.) $(a+b)^m = b^m + \binom{m}{1}ab^{m-1} + \binom{m}{2}a^2b^{m-2} + \binom{m}{3}a^3b^{m-3} + \cdots$

für $|b| > |a|$. [§ 44. Gl. (32.)]

102.) $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots$

für $-1 < x \leqq +1$. [§ 45, Gl. (8.)]

103.) $\ln 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$. [§ 45, Gl. (8a.)]

104.) $\ln(a+y) = \ln a + \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + - \cdots$

für $|y| < |a|$. [§ 45, Gl. (9.)]

105.) $\ln(a+1) = \ln a + \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^3} - \frac{1}{4a^4} + - \cdots$.

[§ 45, Gl. (9a.)]

106.) $\ln(y+z) = \ln y + 2\left[\frac{z}{2y+z} + \frac{z^3}{3(2y+z)^3} + \frac{z^5}{5(2y+z)^5} + \cdots\right]$

für $-1 < \frac{z}{2y+z} < +1$. [§ 45, Gl. (12.)]

107.) $\ln(y+1) = \ln y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \cdots\right]$.

[§ 45, Gl. (12a.)]

108.) $\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \cdots$

für $-1 < x < +1$. [§ 49, Gl. (4.)]

109.) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \cdots$

[§ 50, Gl. (1.) und § 54, Beispiel 2 auf Seite 262.]

110.) $\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - + \cdots$

[§ 50, Gl. (14.)]

111.) $\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 . 5^3} + \frac{1}{5 . 5^5} - + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 . 239^3} + - \cdots\right).$

[§ 50, Gl. (23.)]

112.) $\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1 . 3}{2 . 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots$

für $-1 < x < +1.$ [§ 51, Gl. (3.)]

113.) Eine Reihe heißt *„konvergent"*, wenn S_n, die Summe der n ersten Glieder, sich mit unbegrenzt wachsendem n einer bestimmten, endlichen Grenze S nähert, welche die *„Summe der Reihe"* genannt wird. [§ 52.]

114.) Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern *konvergiert*, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

I. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq k < 1,$

II. $\sqrt[n]{u_n} \leqq k < 1,$

III. $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geqq p > 1.$ [§ 53, Satz 5, 7 und 12.]

115.) Eine Reihe mit lauter positiven Gliedern *divergiert*, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$, eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

I. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1,$

II. $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1,$

III. $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqq 1.$ [§ 53, Satz 6, 8 und 13.]

116.) Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern konvergiert, wenn die Summe der absoluten Beträge konvergiert. [§ 54, Satz 1; vgl. auch Formel Nr. 118.]

117.) Eine alternierende Reihe konvergiert, wenn der absolute Betrag der einzelnen Glieder immer kleiner und schließlich unendlich klein wird. [§ 54, Satz 2.]

118.) Eine Reihe ist unbedingt konvergent, wenn die Summe der absoluten Beträge ihrer einzelnen Glieder konvergiert.

[§ 55, Satz 3 und § 107, Satz 1.]

119.) Sind

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots \quad \text{und} \quad V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

zwei unbedingt konvergente Reihen, und ist

$$w_0 = u_0 v_0,$$
$$w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0,$$
$$w_2 = u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0,$$

so ist auch die Reihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$$

unbedingt konvergent, und ihre Summe W ist gleich dem Produkte UV der Summen der beiden ersten Reihen.

[§ 56, Satz 3 und § 107, Satz 3.]

120.) Eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ konvergiert unbedingt für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Größe r, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \geqq r$$

wird. Es ist dann auch die Reihe

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots,$$

welche aus der ursprünglichen Reihe durch Differentiation der einzelnen Glieder entsteht, für alle Werte von x zwischen $-r$ und $+r$ unbedingt konvergent.

[§ 58, Satz 1 und 2.]

121.) Eine Potenzreihe konvergiert unbedingt für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als die positive Größe r, wenn von einer bestimmten Stelle ab, z. B. für $n \geqq m$.

$$|a_n| r^n \leqq g$$

ist, wobei g eine bestimmte endliche Größe bedeutet.

[§ 58, Satz 3.]

122.) Eine Potenzreihe konvergiert unbedingt für alle Werte von x, deren absoluter Betrag (gleich oder) kleiner ist als

die positive Größe r, wenn sie für x gleich r unbedingt konvergiert. [§ 58, Satz 4.]

123.) Ist eine Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ unbedingt konvergent für x gleich r, so ist auch die Reihe

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

unbedingt konvergent für alle Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als r ist. [§ 58, Satz 5.]

124.) Ist die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ für x gleich r divergent, so ist sie auch für alle Werte von x divergent, deren absoluter Betrag größer ist als r. [§ 58, Satz 6.]

125.) Gibt es überhaupt Werte von x, welche von Null verschieden sind, und für welche die Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ unbedingt konvergiert, so konvergiert die Reihe entweder unbedingt für alle endlichen Werte von x, oder es gibt eine positive Zahl r, welche die Eigenschaft besitzt, daß die Reihe unbedingt konvergiert für $|x| < r$, und daß sie divergiert für $|x| > r$. [§ 58, Satz 7.]

126.) Wenn die Größen $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ positiv sind und, beständig abnehmend, die Null zur Grenze haben, so ist die Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + \cdots$$

konvergent für alle Werte von x, welche von $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ verschieden sind; und die Reihe

$$\tfrac{1}{2}a_0 - a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) - a_3 \cos(3x) + - \cdots$$

ist konvergent für alle Werte von x, welche von $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \ldots$ verschieden sind. [§ 59, Satz 1.]

127.) Wenn die Größen $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiv sind und, beständig abnehmend, die Null zur Grenze haben, so sind die Reihen

$$b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x) + \cdots$$

und

$$b_1 \sin x - b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) - b_4 \sin(4x) + - \cdots$$

für alle Werte von x konvergent. [§ 59, Satz 2.]

128.) Um die Werte von x zu bestimmen, für welche $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum wird, bestimme man die Werte von x, für welche $f'(x)$ gleich Null wird. Ein solcher

Wert sei x, und $f^{(n)}(x)$ sei die erste spätere Ableitung, welche für diesen Wert von x nicht verschwindet; dann ist $f(x)$ ein *Maximum*, wenn *n gerade* und $f^{(n)}(x)$ *negativ* ist; $f(x)$ ist ein *Minimum*, wenn *n gerade* und $f^{(n)}(x)$ *positiv* ist. Dagegen *tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, wenn n ungerade ist.* [§ 62.]

129.) Ist

$$f'(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

so wird für alle Werte von x, für welche $P(x)$ verschwindet,

$$f''(x) = \frac{P'(x)}{Q(x)}. \qquad \text{[§ 64, Gl. (3.)]}$$

130.)

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x=a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{f^{(n)}(x)},$$

wenn

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x=a} \varphi'(x) = 0, \quad \ldots \lim_{x=a} \varphi^{(n-1)}(x) = 0,$$

$$\lim_{x=a} f(x) = 0, \quad \lim_{x=a} f'(x) = 0, \quad \ldots \lim_{x=a} f^{(n-1)}(x) = 0,$$

[§ 66, Gl. (13.), (14.) und (18.)]

oder wenn

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} \varphi'(x) = \infty, \quad \ldots \lim_{x=a} \varphi^{(n-1)}(x) = \infty,$$

$$\lim_{x=a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x=a} f'(x) = \infty, \quad \ldots \lim_{x=a} f^{(n-1)}(x) = \infty.$$

[§ 68, Gl. (12.)]

131.) Ist

$$z = F(u, v),$$

so wird

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{F(u + \Delta u, v) - F(u, v)}{\Delta u} = F_1(u, v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{F(u, v + \Delta v) - F(u, v)}{\Delta v} = F_2(u, v).$$

[§ 77, Gl. (5.) und (6.), (5a.) und (6a.)]

132.) Ist

$$z = F(u, v),$$

und sind u und v beide Funktionen von x, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx},$$

oder

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$ [§ 77, Gl. (16.) und (16a.)]

133.) $$\frac{d\ln(uv)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$ [§ 77, Gl. (24.)]

134.) $$\frac{d\ln\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$ [§ 77, Gl. (26.)]

135.) $$\frac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v . \ln u \frac{dv}{dx}.$$ [§ 77, Gl. (28.)]

136.) Ist $z = F(x, y)$ und $y = f(x)$, so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

oder

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx},$$

also

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

oder

$$dF(x, y) = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy.$$

[§ 78, Gl. (6.) und (7.)]

137.) Ist $F(x, y) = 0$, so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_1(x, y)}{F_2(x, y)}.$$ [§ 78, Gl. (12.)]

138.) $$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}p.$$ [§ 80, Gl. (2a.)]

139.) $$r = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}p.$$ [§ 80, Gl. (3a.)]

140.) Sind x und y so bestimmt, daß

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(x, y) = 0$$

werden, so ist y ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem F_2 und F_{11} gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. [§ 82.]

140a.) Sind x und y so bestimmt, daß

$$F(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad F_2(x, y) = 0$$

werden, so ist x ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem F_1 und F_{22} gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. [§ 82.]

141.) Ist $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so wird

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx},$$

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx},$$

oder

$$q = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

[§ 84, Gl. (11.), (12.), (12a.) und (12b.)]

142.) $p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$ und $q = \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$,

$$r = \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3} - 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

[§ 86, Gl. (4.) und (7.)]

143.) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{p}$, $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{q}{p^3}$, $\dfrac{d^3x}{dy^3} = -\dfrac{pr - 3q^2}{p^5}$.

[§ 86, Gl. (5.) und (8.)]

144.) Gleichung der Tangente:

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x), \quad \text{oder} \quad F_1(x' - x) + F_2(y' - y) = 0,$$

oder

$$\frac{x' - x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y' - y}{\frac{dy}{dt}}.$$

[§ 88, Gl. (6.), (6a.) und (6b.)]

145.) Gleichung der Normale:

$$y' - y = -\frac{dx}{dy}(x' - x), \quad \text{oder} \quad \frac{x' - x}{F_1} = \frac{y' - y}{F_2},$$

oder

$$(x' - x)\frac{dx}{dt} + (y' - y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

[§ 88, Gl. (7.), (7a.) und (7b.)]

146.) Subnormale $(Sn) = y\frac{dy}{dx}$. [§ 88, Gl. (9.)]

147.) Subtangente $(St) = y\frac{dx}{dy}$. [§ 88, Gl. (10.)]

148.) $ds^2 = dx^2 + dy^2$,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \quad \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$ [§ 88, Gl. (13.) und (13 a.)]

149.) Normale $(N) = y\frac{ds}{dx}$. [§ 88, Gl. (14.)]

150.) Tangente $(T) = y\frac{ds}{dy} = N\frac{dx}{dy}$. [§ 88, Gl. (14.)]

151.) Eine Kurve $y = f(x)$ ist nach oben konkav oder konvex, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ größer oder kleiner als Null ist. Vorausgesetzt ist, daß die positive Richtung der Y-Achse nach oben geht; wird das Koordinaten-System um 180^0 gedreht, so muß man das Wort „*oben*“ mit „*unten*“ vertauschen. [§ 90, Gl. (10.) und (12.)]

152.) Ein Wendepunkt tritt ein, wenn für den zugehörigen Wert von x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \infty$$

wird und außerdem das Zeichen wechselt. [§ 90.)]

153.) Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen

$$f(x), \quad f'(x), \quad f''(x), \ldots f^{(n+1)}(x),$$
$$g(x), \quad g'(x), \quad g''(x), \ldots g^{(n+1)}(x)$$

endlich und stetig sind für den betrachteten Wert von x, haben zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Punkte P eine Berührung (oder Oskulation) von der n^{ten} Ordnung, wenn für den zugehörigen Wert von x

$$f(x) = g(x),\ f'(x) = g'(x),\ f''(x) = g''(x), \ldots f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x).$$ [§ 92.]

154.) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises hat die Koordinaten

$$\xi = x - \frac{(1+p^2)p}{q} = x - \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 p}{q},$$

$$\eta = y + \frac{1+p^2}{q} = y + \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{q},$$

oder

$$\xi = x - \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = x - \frac{ds^2 dy}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

$$\eta = y + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{t^2}} = y + \frac{ds^2 dx}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

[§ 93, Gl. (21.) und (25.); § 95.]

155.) Der Halbmesser des Krümmungskreises ist

$$\varrho = \pm\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{q},$$

oder

$$\varrho = \pm\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} = \pm\frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

[§ 93, Gl. (21.) und (25.); § 95.]

156.) Der Krümmungskreis hat im Punkte P mit der Kurve eine Berührung dritter Ordnung, wenn

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3\varrho^2(x-\xi)}{(y-\eta)^5}, \quad \text{oder} \quad \frac{d^3x}{dy^3} = -\frac{3\varrho^2(y-\eta)}{(x-\xi)^5}.$$

[§ 93, Gl. (23.) und (23a.)]

157.) Der Kontingenzwinkel $d\alpha$ wird erklärt durch die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\varrho}.$$ [§ 94, Gl. (9.) und (11.)]

158.) $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$ [§ 99, Gl. (6.)]

159.) Nennt man den Winkel, den eine Tangente mit dem zugehörigen Radius vektor bildet, μ, so ist

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r d\varphi}{dr}.$$ [§ 99, Gl. (7a.)]

160.) Polar-Subnormale $(Sn) = \frac{dr}{d\varphi}.$ [§ 99, Gl. (10.)]

161.) Polar-Subtangente $(St) = r \operatorname{tg}\mu = \frac{r^2 d\varphi}{dr}.$ [§ 99, Gl. (11.)]

162.) Polar-Normale $(N) = \frac{ds}{d\varphi}.$ [§ 99, Gl. (12.)]

163.) Polar-Tangente $(T) = N . \operatorname{tg}\mu = \frac{r ds}{dr}.$ [§ 99, Gl. (13.)]

164.) Der Mittelpunkt des Krümmungskreises hat die Koordinaten

$$\xi = x - \frac{ds^2 dy}{dx d^2y - dy d^2x}$$
$$= r\cos\varphi - \frac{ds^2(r\cos\varphi d\varphi + dr . \sin\varphi)}{(r^2 d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi},$$

$$\eta = y + \frac{ds^2 dx}{dx d^2y - dy d^2x}$$
$$= r\sin\varphi + \frac{ds^2(-r\sin\varphi d\varphi + dr . \cos\varphi)}{(r^2 d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi},$$

und der Halbmesser des Krümmungskreises ist

$$\varrho = \pm \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x} = \pm \frac{ds^3}{(r^2 d\varphi^2 + 2dr^2 - rd^2r)d\varphi}.$$

[§ 101, Gl. (8.) und (9.)]

165.) $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$ [§ 103, Gl. (2.)]

166.) $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$ [§ 103, Gl. (3.)]

167.) $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$ [§ 103, Gl. (4.)]

168.) $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$ [§ 103, Gl. (5.)]

169.) $N(a + bi) = N(a - bi) = a^2 + b^2.$ [§ 103, Gl. (8.)]

170.) $|a + bi| = |a - bi| = +\sqrt{a^2 + b^2}.$ [§ 103, Gl. (9.)]

171.) $\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$ [§ 103, Gl. (10.)]

172.) $\frac{c + di}{a + bi} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} i.$ [§ 103, Gl. (11.)]

173.) $$(a + bi)^n = \left[a^n - \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 - + \cdots\right] + \left[\binom{n}{1} a^{n-1} b - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + - \cdots\right] i.$$
[§ 103, Gl. (12.)]

174.) $$a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$
wobei
$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$
oder
$$a + bi = r[\cos(\varphi + 2h\pi) + i \sin(\varphi + 2h\pi)],$$
wobei h eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl ist. [§ 104, Gl. (5.), (6.), (7.) und (7 a.)]

175.) $r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) =$
$r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$ [§ 104, Gl. (8.)]

176.) $[r(\cos\varphi + i \sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)].$
[§ 104, Gl. (10.)]

177.) $$\cos(n\varphi) = \cos^n\varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2}\varphi \sin^2\varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4}\varphi \sin^4\varphi - + \cdots,$$
$$\sin(n\varphi) = \binom{n}{1} \cos^{n-1}\varphi \sin\varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3}\varphi \sin^3\varphi + - \cdots.$$
[§ 104, Gl. (11.) und (12.)]

178.) $\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$
[§ 104, Gl. (13.)]

179.) $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2h\pi}{n}\right)\right],$

wobei h eine beliebige ganze Zahl ist. [§ 104, Gl. (16.)]

180.) Ist $f(z) = f(x + yi) = u + vi$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen $x + yi$, so wird
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$ [§ 108, Gl. (7.)]

181.) $e^{yi} = \cos y + i \sin y, \quad e^{-yi} = \cos y - i \sin y.$
[§ 109, Gl. (6.) und (7.)]

182.) $\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}.$ [§ 109, Gl. (8.)]

183.) $e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i \sin y).$ [§ 109, Gl. (9.)]

184.) $e^{2h\pi i} = 1$, wenn h eine ganze Zahl ist. [§ 109, Gl. (16.)]

185.) $e^{z+2h\pi i} = e^{z}$, wenn h eine ganze Zahl ist. [§ 109, Gl. (17.)]

186.) $\mathfrak{Cos}(\varphi i) = \cos\varphi, \quad \mathfrak{Sin}(\varphi i) = i \sin\varphi.$
[§ 109, Gl. (18.) und (19.)]

187.) $\cos(\varphi i) = \mathfrak{Cos}\,\varphi, \quad \sin(\varphi i) = i\,\mathfrak{Sin}\,\varphi.$
[§ 109, Gl. (20.) und (21.)]

188.) $\mathfrak{Cos}(u + 2h\pi i) = \mathfrak{Cos}\,u, \quad \mathfrak{Sin}(u + 2h\pi i) = \mathfrak{Sin}\,u.$
[§ 109, Gl. (22.) und (23.)]

189.) $\mathfrak{Tg}(u + h\pi i) = \mathfrak{Tg}\,u, \quad \mathfrak{Ctg}(u + h\pi i) = \mathfrak{Ctg}\,u.$
[§ 109, Gl. (24.) und (25.)]

190.) $$2^{2n}(\cos\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) + \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi + \cdots + \binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + \binom{2n}{n}.$$ [§ 109, Gl. (28.)]

191.) $$2^{2n+1}(\cos\varphi)^{2n+1} = 2\cos(2n+1)\varphi + \binom{2n+1}{1} 2\cos(2n-1)\varphi + \cdots + \binom{2n+1}{n-1} 2\cos(3\varphi) + \binom{2n+1}{n} 2\cos\varphi.$$
[§ 109, Gl. (29.)]

192.) $$(-1)^n 2^{2n}(\sin\varphi)^{2n} = 2\cos(2n\varphi) - \binom{2n}{1} 2\cos(2n-2)\varphi + \binom{2n}{2} 2\cos(2n-4)\varphi - + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1} 2\cos(2\varphi) + (-1)^n \binom{2n}{n}.$$
[§ 109, Gl. (30.)]

193.) $$(-1)^n 2^{2n+1}(\sin\varphi)^{2n+1} = 2\sin(2n+1)\varphi - \binom{2n+1}{1} 2\sin(2n-1)\varphi + - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{n-1} 2\sin(3\varphi) + (-1)^n \binom{2n+1}{n} 2\sin\varphi.$$
[§ 109, Gl. (31.)]

194.) Aus der Gleichung

$$e^{x+yi} = u + vi \quad \text{folgt} \quad \ln(u + vi) = x + yi + 2h\pi i.$$

Dabei ist h eine beliebige positive oder negative *ganze* Zahl und

$$x = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2), \quad y = \operatorname{arctg}\left(\frac{v}{u}\right),$$

und zwar ist

$$0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad \text{wenn} \quad u > 0,\ v > 0,$$

$$\frac{\pi}{2} < y < \pi, \quad „ \quad u < 0,\ v > 0,$$

$$\pi < y < \frac{3\pi}{2}, \quad „ \quad u < 0,\ v < 0,$$

$$\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi, \quad „ \quad u > 0,\ v < 0.$$

[§ 110, Gl. (1.), (3.) und (6.)]

195.) $\ln(-1) = (2h + 1)\pi i.$ [§ 110, Gl. (8.)]

196.) $\ln\left(\frac{1 + \varphi i}{1 - \varphi i}\right) = 2i \operatorname{arctg}\varphi.$ [§ 111, Gl. (4.)]

197.) $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}(\varphi i) = i \operatorname{arctg}\varphi, \quad \operatorname{arctg}(\varphi i) = i\,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\varphi.$

[§ 111, Gl. (6.) und (8.)]

198.) Hat die Gleichung

$$f(x) = x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \mathfrak{f}_3 x^{n-3} + - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

die Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, so ist

$$\mathfrak{f}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n,$$

$$\mathfrak{f}_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$\mathfrak{f}_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{f}_n = x_1x_2x_3 \ldots x_n.$$

[§ 115, Gl. (6.) und (9.)]

199.) Die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}y_2$$

$$+ \cdots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

$$= \frac{f(x) \cdot y_1}{(x-x_1)f'(x_1)} + \frac{f(x) \cdot y_2}{(x-x_2)f'(x_2)} + \cdots + \frac{f(x) \cdot y_n}{(x-x_n)f'(x_n)}$$

nimmt für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ an. Dabei ist

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n).$$

(Interpolationsformel von *Lagrange*.) [§ 116, Gl. (2.), (3.) und (6.)]

200.) Die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{aligned} y = y_1 &+ A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) \\ &+ A_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots \\ &+ A_{n-1}(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

nimmt für $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ an, wenn man die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots A_{n-1}$ der Reihe nach aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + A_1(x_2 - x_1), \\ y_3 &= y_1 + A_1(x_3 - x_1) + A_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2), \\ y_4 &= y_1 + A_1(x_4 - x_1) + A_2(x_4 - x_1)(x_4 - x_2) \\ &\qquad + A_3(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

berechnet. [§ 117, Gl. (1.) bis (5.)]

201.) Die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\begin{aligned} y = y_1 &+ \frac{\Delta y_1 . (x - x_1)}{1!\, h} + \frac{\Delta^2 y_1 . (x - x_1)(x - x_2)}{2!\, h^2} \\ &+ \frac{\Delta^3 y_1 . (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{3!\, h^3} + \cdots \\ &+ \frac{\Delta^{n-1} y_1 . (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(n-1)!\, h^{n-1}} \end{aligned}$$

nimmt für $x = x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ bezw. die vorgeschriebenen Werte $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ an, wenn

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

ist, und wenn man

$$\begin{aligned} &\Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \Delta y_2 = y_3 - y_2,\ \Delta y_3 = y_4 - y_3, \ldots, \\ &\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2,\ \Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3, \ldots, \\ &\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1,\ \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2,\ \Delta^3 y_3 = \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3, \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

setzt.

(Interpolationsformel von *Newton*.) [§ 117, Gl. (12.) bis (16.) und (35.)]

202.) Ist $\vartheta(x)$ der höchste gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $f'(x)$, so hat die Gleichung

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x)} = 0$$

dieselben Wurzeln wie die Gleichung $f(x) = 0$, aber jede nur einmal. [§ 119, Gl. (8.)]

203.) Ist $\varrho(x)$ der höchste gemeinsame Teiler von $\frac{f(x)}{\vartheta(x)}$ und $f'(x)$, so enthält die Gleichung

$$\varrho(x) = 0$$

nur die mehrfachen Wurzeln von $f(x) = 0$, und jede nur einmal. [§ 119, Gl. (9.)]

204.) Die Gleichung

$$\frac{f(x)}{\vartheta(x) \,.\, \varrho(x)} = 0$$

enthält nur die einfachen Wurzeln von $f(x) = 0$. [§ 119, Gl. (10.)]

205.) Ist in der Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots - b_m x^{n-m} \pm \cdots - b_p x^{n-p} \pm \cdots \pm a_n = 0$$

$-b_m$ der *erste* und $-b_p$ dem absoluten Betrage nach der *größte* negative Koeffizient, so ist

$$L = 1 + \sqrt[m]{b_p}$$

die obere Grenze aller reellen Wurzeln. [§ 120, Gl. (7.)]

206.) Die Anzahl der *positiven* Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

kann nie größer sein als die Anzahl der Zeichenwechsel; und die Anzahl der *negativen* Wurzeln derselben Gleichung kann nie größer sein als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Gleichung

$$f_1(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + - \cdots \mp a_{n-1} x \pm a_n = 0.$$

Dabei ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenwechsel und der Anzahl der positiven Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ eine gerade Zahl. Dasselbe gilt natürlich für die Gleichung $f_1(x) = 0$.

(*Cartesi*sche Zeichenregel.) [§ 121, Satz 3.]

206a.) Ist das Polynom $f(x)$ vollständig, so ist die Anzahl der negativen Wurzeln nie größer als die Anzahl der Zeichenfolgen. Dabei ist die Differenz zwischen der Anzahl der Zeichenfolgen und der Anzahl der negativen Wurzeln eine gerade Zahl. [§ 121, Satz 4.]

206b.) Ist das Polynom $f(x)$ vollständig, und sind sämtliche Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell, so ist die Anzahl der positiven Wurzeln ebenso groß wie die Anzahl der Zeichenwechsel, und die Anzahl der negativen Wurzeln ist ebenso groß wie die Anzahl der Zeichenfolgen. [§ 121, Satz 5.]

207.) Hat die Gleichung $f(x) = 0$ nur einfache Wurzeln, und ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= Q_1(x) \cdot f'(x) - f_2(x),\\
f'(x) &= Q_2(x) \cdot f_2(x) - f_3(x),\\
f_2(x) &= Q_3(x) \cdot f_3(x) - f_4(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{\mu-2}(x) &= Q_{\mu-1}(x) \cdot f_{\mu-1}(x) - f_\mu(x),\\
f_{\mu-1}(x) &= Q_\mu(x) \cdot f_\mu(x),
\end{aligned}$$

wobei $f_\mu(x)$ eine Konstante ist, so liegen zwischen x_1 und x_2 genau so viele reelle Wurzeln, wie die Reihe

$$f_\mu, \quad f_{\mu-1}(x_1), \ldots f_3(x_1), \quad f_2(x_1), \quad f'(x_1), \quad f(x_1)$$

Zeichenwechsel mehr hat als die Reihe

$$f_\mu, \quad f_{\mu-1}(x_2), \ldots f_3(x_2), \quad f_2(x_2), \quad f'(x_2), \quad f(x_2).$$ [§ 122.]

208.) Sind die Zahlen a und b so bestimmt, daß zwischen a und b nur eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ liegt, und daß die Gleichungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ in diesem Intervalle keine Wurzel haben, so setze man

$$\begin{aligned}
a' &= a - \frac{f(a)}{f'(b)}, & b' &= b - \frac{f(b)}{f'(b)},\\
a'' &= a' - \frac{f(a')}{f'(b')}, & b'' &= b' - \frac{f(b')}{f'(b')}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

oder

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \qquad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}, \qquad b'' = b' - \frac{f(b')}{f'(a')},$$

. . . .

je nachdem $f'(a)$ und $f''(a)$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. Die Intervalle von a bis b, a' bis b', a'' bis b'',... werden immer kleiner und schließlich beliebig klein. [§ 123, Gl. (9.), (14.), (20.) und (27.)]

209.) Die Asymptoten $y' = mx' + \mu$ einer Kurve

$$F(x, y) = U_n(x, y) + U_{n-1}(x, y) + \cdots + U_1(x, y) + U_0 = 0$$

findet man, indem man die n Werte von m aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{U_n(x, y)}{x^n} = \lim_{x=\infty} \frac{ay^n + a_1xy^{n-1} + a_2x^2y^{n-2} + \cdots + a_nx^n}{x^n}$$

$$= am^n + a_1m^{n-1} + a_2m^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

ausrechnet und darauf aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x, mx + \mu)}{x^{n-1}} = 0$$

die zugehörigen Werte von μ bestimmt.

Sind α Werte von m einander gleich, so liegen möglicherweise etliche von den zugehörigen Asymptoten im Unendlichen. Ist das nicht der Fall, so findet man die α zugehörigen Werte von μ aus der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x, mx + \mu)}{x^{n-\alpha}} = 0.$$

In ähnlicher Weise erhält man durch Vertauschung von x mit y auch die Asymptoten, wenn die Gleichung derselben die Form $x' = ly' + \lambda$ hat. [§ 125 und 126.]

210.)

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^\lambda a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \ldots a_{n\nu}$$

wo

$$\lambda = \binom{\alpha\, \beta\, \gamma \ldots \nu}{1\, 2\, 3 \ldots n}$$

die Transpositionszahl zwischen den Permutationsformen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu$ und $1\,2\,3\ldots n$ ist, und wo sich die Summation über alle $n!$ Permutationsformen $\alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu$ der Zahlen $1\,2\,3\ldots n$ erstreckt. [§ 130, Gl. (1.) und (2.)]

211.)
$$\begin{vmatrix} a_{f\alpha} & a_{f\beta} & a_{f\gamma} & \ldots & a_{f\nu} \\ a_{g\alpha} & a_{g\beta} & a_{g\gamma} & \ldots & a_{g\nu} \\ a_{h\alpha} & a_{h\beta} & a_{h\gamma} & \ldots & a_{h\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l\alpha} & a_{l\beta} & a_{l\gamma} & \ldots & a_{l\nu} \end{vmatrix} = (-1)^{\lambda} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$\lambda = \begin{pmatrix} f\,g\,h\ldots l \\ \alpha\,\beta\,\gamma\ldots\nu \end{pmatrix}.$$

[§ 131, Satz 4 und Gleichung (9.), (10.) und (17.)]

212.) Entsteht Δ_1 aus Δ durch Vertauschung zweier parallelen Reihen, so ist

$$\Delta_1 = -\Delta.$$ [§ 131, Satz 5.]

213.) Sind die Elemente zweier parallelen Reihen der Determinante Δ identisch, so ist

$$\Delta = 0.$$ [§ 131, Satz 6.]

214.)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ [§ 131, Satz 7.]

215.) Ist α_{fr} der Koeffizient von a_{fr} in Δ, so ist

$$\alpha_{fr} = (-1)^{f+r} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,1} & \ldots & a_{f-1,r-1} & a_{f-1,r+1} & \ldots & a_{f-1,n} \\ a_{f+1,1} & \ldots & a_{f+1,r-1} & a_{f+1,r+1} & \ldots & a_{f+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n+1)(f+r)} \begin{vmatrix} a_{f+1,r+1} & a_{f+1,r+2} & \ldots & a_{f+1,r-1} \\ a_{f+2,r+1} & a_{f+2,r+2} & \ldots & a_{f+2,r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{f-1,r+1} & a_{f-1,r+2} & \ldots & a_{f-1,r-1} \end{vmatrix}.$$

[§ 132, Gl. (9.) und (10.)]

216.) $$\Delta = a_{1r}\,\alpha_{1r} + a_{2r}\,\alpha_{2r} + \cdots + a_{nr}\,\alpha_{nr}.$$ [§ 132, Gl. (12.)]

217.) $\Delta = a_{f1}\alpha_{f1} + a_{f2}\alpha_{f2} + \cdots + a_{fn}\alpha_{fn}$. [§ 132, Gl. (13.)]

218.) $$a_{1s}\alpha_{1r} + a_{2s}\alpha_{2r} + \cdots + a_{ns}\alpha_{nr} = 0 \text{ für } r \gtrless s.$$ [§ 132, Gl. (14a.)]

219.) $$a_{g1}\alpha_{f1} + a_{g2}\alpha_{f2} + \cdots + a_{gn}\alpha_{fn} = 0 \text{ für } f \gtrless g.$$ [§ 132, Gl. (15a.)]

220.) Sind die Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{array}$$

gegeben, so wird unter der Voraussetzung, daß die Determinante Δ der Koeffizienten von Null verschieden ist,

$$\Delta \cdot x_r = c_1\alpha_{1r} + c_2\alpha_{2r} + \cdots + c_n\alpha_{nr},$$

oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot x_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,r-1} & c_1 & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,r-1} & c_2 & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,r-1} & c_n & a_{n,r+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

[§ 133, Gl. (1.), (7.) und (7a.)]

221.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 134, Satz 1.]

222.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ 0 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 134, Satz 2.]

223.) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}.$$ [§ 134, Satz 3.]

224.) $$\begin{vmatrix} a_{11} \dots ma_{1r} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots ma_{2r} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots ma_{nr} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1r} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2r} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nr} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$
[§ 134, Satz 4.]

225.) $$\begin{vmatrix} ma_{12}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ ma_{22}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ ma_{n2}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$ [§ 134, Satz 5.]

226.) $$\begin{vmatrix} A_1 + B_1, C_1, D_1, \dots \\ A_2 + B_2, C_2, D_2, \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n + B_n, C_n, D_n, \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1\, C_1\, D_1 \dots \\ A_2\, C_2\, D_2 \dots \\ \dots\dots\dots \\ A_n\, C_n\, D_n \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1\, C_1\, D_1 \dots \\ B_2\, C_2\, D_2 \dots \\ \dots\dots\dots \\ B_n\, C_n\, D_n \dots \end{vmatrix}.$$
[§ 134, Satz 6.]

227.) $$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{1r}, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} + ma_{2r}, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} + ma_{nr}, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$ [§ 134, Satz 7.]

228.) $$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}\, b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}\, b_{n2} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}\, c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21}\, c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ c_{n1}\, c_{n2} \dots c_{nn} \end{vmatrix},$$

wo

$$c_{fr} = a_{f1} b_{r1} + a_{f2} b_{r2} + \dots + a_{fn} b_{rn},$$

oder

$$c_{fr} = a_{f1} b_{1r} + a_{f2} b_{2r} + \dots + a_{fn} b_{nr},$$

oder

$$c_{fr} = a_{1f} b_{r1} + a_{2f} b_{r2} + \dots + a_{nf} b_{rn},$$

oder

$$c_{fr} = a_{1f} b_{1r} + a_{2f} b_{2r} + \dots + a_{nf} b_{nr}.$$
[§ 135, Gl. (6.), (7.) und (12.) bis (15.)]

229.) Ist

$$z = f(x, y)$$

eine Funktion von zwei voneinander unabhängigen Veränderlichen x und y, so wird

$$\partial_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx, \quad \partial_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \partial_x z + \partial_y z.$$

[§ 138, Gl. (8.), (9.) und (14.)]

230.) Das partielle Differential einer Funktion

$$z = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

in bezug auf u_α ist gleich der partiellen Ableitung von z nach u_α, multipliziert mit du_α, also

$$\partial_{u_1} z = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1, \quad \partial_{u_2} z = \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2, \ldots \partial_{u_n} z = \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n.$$

[§ 140, Gl. (13.)]

231.) Das *vollständige* (oder *totale*) Differential von

$$z = f(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

ist

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} du_n,$$

und zwar gleichviel, ob $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander unabhängig sind, oder ob $u_1, u_2, \ldots u_n$ selbst wieder Funktionen von einer oder von mehreren Veränderlichen sind. Wenn z. B. $u_1, u_2, \ldots u_n$ sämtlich Funktionen einer Veränderlichen t sind, so kann man auch schreiben

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt}.$$

[§ 140, Gl. (14.), (17.) und (23.)]

232.) Ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

so wird

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{fr}} = \alpha_{fr},$$

wobei α_{fr} die in Formel Nr. 215 erklärte Unterdeterminante $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. [§ 141, Gl. (3.)]

233.)
$$\varDelta = a_{1r}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1r}} + a_{2r}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{2r}} + \cdots + a_{nr}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{nr}},$$
$$\varDelta = a_{f1}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{f1}} + a_{f2}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{f2}} + \cdots + a_{fn}\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{fn}}.$$

[§ 141, Gl. (4.) und (5.)]

234.) Sind die Elemente der Determinante $\varDelta$ sämtlich Funktionen von t, und bezeichnet man der Kürze wegen $\frac{da_{fr}}{dt}$ mit a'_{fr}, so wird

$$\frac{d\varDelta}{dt} = \sum_f a'_{f1}\alpha_{f1} + \sum_f a'_{f2}\alpha_{f2} + \cdots + \sum_f a'_{fn}\alpha_{fn}, \quad f = 1, 2, \ldots n,$$

oder

$$\frac{d\varDelta}{dt} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \ldots \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \ldots \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \cdots$$
$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a'_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots & a'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

$$\frac{d\varDelta}{dt} = \sum_r a'_{1r}\alpha_{1r} + \sum_r a'_{2r}\alpha_{2r} + \cdots + \sum_r a'_{nr}\alpha_{nr}, \quad r = 1, 2, \ldots n.$$

[§ 141, Gl. (7.), (8.) und (9.)]

235.)
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},$$

oder

$$f_{12}(x, y) = f_{21}(x, y).$$

[§ 142, Gl. (20.) bis (22.)]

236.) Ist

$$z = f(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

und sind die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander *unabhängig,* so ist

$$d^m z = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}du_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}du_n\right)^{(m)}.$$

Diese Formel bleibt noch richtig, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ *lineare* Funktionen einer Veränderlichen t sind, wenn also

$$u_1 = a_1 t + b_1, \quad u_2 = a_2 t + b_2, \ldots u_n = a_n t + b_n;$$

dann kann man auch schreiben

$$\frac{d^m z}{dt^m} = \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}\right)^{(m)}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u_1}a_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}a_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}a_n\right)^{(m)}.$$

[§ 143, Gl. (20.), (33.) und (39.)]

237.) Aus der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

findet man

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1}{F_3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2}{F_3}.$$ [§ 144, Gl. (3.) und (4.)]

238.) Gelten die Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad G(x, y, z) = 0$$

gemeinschaftlich, so wird

$$dx : dy : dz =$$

$$(F_2G_3 - F_3G_2) : (F_3G_1 - F_1G_3) : (F_1G_2 - F_2G_1),$$

oder

$$dx : dy : dz = \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_3 & F_1 \\ G_3 & G_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix}.$$

[§ 145, Gl. (9.) und (9 a.)]

239.) Für das Bogenelement ds einer Raumkurve erhält man

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$ [§ 146, Gl. (3.)]

240.) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

wo α, β, γ die Winkel sind, welche das Bogenelement ds mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet. [§ 146, Gl. (4.)]

241.) Sind

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen einer Raumkurve, so hat die Tangente im Kurvenpunkte P mit den Koordinaten x, y, z die Gleichungen

$$\frac{x' - x}{dx} = \frac{y' - y}{dy} = \frac{z' - z}{dz},$$

oder

$$\frac{x'-x}{F_2G_3-F_3G_2}=\frac{y'-y}{F_3G_1-F_1G_3}=\frac{z'-z}{F_1G_2-F_2G_1}$$

oder

$$F_1(x'-x)+F_2(y'-y)+F_3(z'-z)=0,$$
$$G_1(x'-x)+G_2(y'-y)+G_3(z'-z)=0.$$

[§ 146, Gl. (13.), (13 a.) und (14.)]

241 a.) Sind x, y, z Funktionen einer vierten Veränderlichen t, so hat die Tangente im Kurvenpunkte P die Gleichungen

$$\frac{x'-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{z'-z}{\frac{dz}{dt}}.$$ [§ 146, Gl. (13 b.)]

242.) Gleichung der Normalebene

$$(x'-x)dx+(y'-y)dy+(z'-z)dz=0,$$

oder

$$(F_2G_3-F_3G_2)(x'-x)+(F_3G_1-F_1G_3)(y'-y)$$
$$+(F_1G_2-F_2G_1)(z'-z)=0.$$

[§ 146, Gl. (17.) und (17 a.)]

242 a.) Gleichung der Normalebene

$$(x'-x)\frac{dx}{dt}+(y'-y)\frac{dy}{dt}+(z'-z)\frac{dz}{dt}=0.$$

[§ 146, Gl. (17 b.)]

243.) Die Schmiegungsebene im Kurvenpunkte P hat die Gleichung

$$P(x'-x)+Q(y'-y)+R(z'-z)=0,$$

wobei

$$P=dyd^2z-dzd^2y,\quad Q=dzd^2x-dxd^2z,\quad R=dxd^2y-dyd^2x.$$

[§ 148, Gl. (13.) und (15.)]

244.) Die Hauptnormale hat die Gleichungen

$$\frac{x'-x}{Qdz-Rdy}=\frac{y'-y}{Rdx-Pdz}=\frac{z'-z}{Pdy-Qdx}.$$

[§ 148, Gl. (17 a.)]

245.) Die Binormale hat die Gleichungen

$$\frac{x'-x}{P}=\frac{y'-y}{Q}=\frac{z'-z}{R}.$$ [§ 148, Gl. (19.)]

246.) Sind α', β', γ' die Winkel, welche die Binormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, so ist

$$\cos\alpha' = \frac{P}{M}, \quad \cos\beta' = \frac{Q}{M}, \quad \cos\gamma' = \frac{R}{M},$$

wobei

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2. \quad \text{[§ 148, Gl. (21.) und (22.)]}$$

247.) Sind α'', β'', γ'' die Winkel, welche die Hauptnormale mit den positiven Richtungen der Koordinaten-Achsen bildet, so ist

$$\cos\alpha'' = \frac{Qdz - Rdy}{Mds}, \quad \cos\beta'' = \frac{Rdx - Pdz}{Mds},$$

$$\cos\gamma'' = \frac{Pdy - Qdx}{Mds}. \quad \text{[§ 148, Gl. (25.)]}$$

248.) Der Krümmungskreis hat die Gleichungen

$$P(x' - \xi) + Q(y' - \eta) + R(z' - \zeta) = 0,$$

$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + (z' - \zeta)^2 - \varrho^2 = 0,$$

wobei

$$x - \xi = -\frac{(Qdz - Rdy)ds^2}{M^2}, \quad y - \eta = -\frac{(Rdx - Pdz)ds^2}{M^2},$$

$$z - \zeta = -\frac{(Pdy - Qdx)ds^2}{M^2}, \quad \varrho = \pm\frac{ds^3}{M}.$$

[§ 149, Gl. (2.), (3.), (18.), (19.) und (21.)]

249.) Bezeichnet man mit $d\varepsilon$ den Kontingenzwinkel, so wird

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \pm\frac{M}{ds^3} = \frac{1}{\varrho}. \quad \text{[§ 149, Gl (29.)]}$$

249a.)
$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^4}. \quad \text{[§ 149, Gl. 32.)]}$$

250.) Bezeichnet man mit $d\varepsilon'$ den Torsionswinkel, so wird

$$(d\varepsilon')^2 = [d(\cos\alpha')]^2 + [d(\cos\beta')]^2 + [d(\cos\gamma')]^2,$$

oder

$$\frac{d\varepsilon'}{ds} = \frac{Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z}{M^2} = \frac{1}{\varrho'},$$

wobei ϱ' der Halbmesser der zweiten Krümmung ist.

[§ 149, Gl. (35.), (39.) und (41.)]

251.) Eine Kurve im Raume ist eine *ebene* Kurve, wenn für alle Punkte der Kurve

$$Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z = 0$$

wird. [§ 149, Gl. (40.)]

252.) Für den Halbmesser r der Schmiegungskugel gelten die Formeln

$$r^2 = \frac{ds^{10}\left\{\left[d\left(\frac{\cos\alpha'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\beta'}{\varrho}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\cos\gamma'}{\varrho}\right)\right]^2\right\}}{(Pd^3x + Qd^3y + Rd^3z)^2},$$

$$r^2 = \varrho^2 + \varrho'^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

[§ 150, Gl. (12.) und (18.)]

253.) Die Gerade

$$x' - x = m(z' - z), \quad y' - y = n(z' - z)$$

ist eine Tangente der Fläche

$$z = f(x, y) \quad \text{oder} \quad F(x, y, z) = 0$$

im Flächenpunkte P, wenn

$$m\frac{\partial z}{\partial x} + n\frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad F_1 m + F_2 n + F_3 = 0.$$

[§ 152, Gl. (4.), (10.) und (12.)]

254.) Die Tangentialebene der Fläche

$$z = f(x, y) \quad \text{oder} \quad F(x, y, z) = 0$$

hat die Gleichung

$$z' - z = \frac{\partial z}{\partial x}(x' - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(y' - y),$$

oder

$$F_1(x' - x) + F_2(y' - y) + F_3(z' - z) = 0.$$

[§ 152, Gl. (16.) und (16a.)]

255.) Die Normale der Fläche im Punkte P hat die Gleichungen

$$x' - x + \frac{\partial z}{\partial x}(z' - z) = 0, \quad y' - y + \frac{\partial z}{\partial y}(z' - z) = 0,$$

oder

$$\frac{x' - x}{F_1} = \frac{y' - y}{F_2} = \frac{z' - z}{F_3}.$$

[§ 152, Gl. (21.) und (22.)]

256.) Ist ϱ der Krümmungshalbmesser der ebenen Kurve, welche aus der Fläche $z' = f(x', y')$ durch die Ebene

$$A(x' - x) + B(y' - y) + C(z' - z) = 0$$

ausgeschnitten wird, so erhält man

$$\varrho^2 = \frac{[(B + Cq)^2 + (A + Cp)^2 + (Aq - Bp)^2]^3}{(A^2 + B^2 + C^2)[r(B + Cq)^2 - 2s(A + Cp)(B + Cq) + t(A + Cp)^2]^2},$$

wobei

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

[§ 154, Gl. (2.) und (15.)]

257.) Der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes ist

$$\varrho = \pm \frac{[1 + p^2 + 2pq\lambda + (1 + q^2)\lambda^2]\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r + 2s\lambda + t\lambda^2},$$

wobei

$$\lambda = \frac{dy}{dx}. \qquad \text{[§ 154, Gl. (18.) und (24.)]}$$

258.) Nennt man die Werte von λ, für welche der Krümmungshalbmesser des zugehörigen Normalschnittes ein Maximum oder ein Minimum wird, λ_1 und λ_2, so findet man

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{(1 + p^2)t - (1 + q^2)r}{pqt - (1 + q^2)s}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{(1 + p^2)s - pqr}{pqt - (1 + q^2)s}.$$

[§ 154, Gl. (27.)]

259.) Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungshalbmesser, so wird

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{s^2 - rt},$$

$$\varrho_1\varrho_2 = -\frac{(1 + p^2 + q^2)^2}{s^2 - rt} \qquad \text{[§ 154, Gl. (31.) und (32.)]}$$

260.) Ist ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes, dessen Ebene mit dem ersten Hauptnormalschnitt den Winkel α bildet, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}. \quad \text{(\textit{Euler}sche Formel.)} \quad \text{[§ 154, Gl. (43.)]}$$

261.) Sind ϱ und ϱ' die Krümmungshalbmesser zweier Normalschnitte, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so ist

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}. \qquad [§ 154, Gl. (45.)]$$

262.) Ist ϱ' der Krümmungshalbmesser eines schiefen Schnittes, dessen Ebene mit der Ebene des zugehörigen Normalschnittes den Winkel ϑ bildet, so ist

$$\varrho' = \varrho \cos\vartheta,$$

wobei ϱ der Krümmungshalbmesser dieses Normalschnittes ist.
(Satz von *Meunier*.) [§ 154, Gl. (54.)]

263.) Das *Gauß*sche Krümmungsmaß im Flächenpunkte P ist

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}. \qquad [§ 156, Gl. (10.)]$$

264.) Die Enveloppe (Umhüllungskurve) der Kurvenschar

$$F(x, y, u) = 0$$

erhält man durch Elimination von u aus den Gleichungen

$$F(x, y, u) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F(x, y, u)}{\partial u} = 0. \qquad [§ 157.]$$

265.) Hat die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkte D mit den Koordinaten x, y einen *Doppelpunkt*, so müssen die drei Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. Die beiden zugehörigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ findet man dann aus der Gleichung

$$F_{11} + 2F_{12}\frac{dy}{dx} + F_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(2)} = 0,$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{12} \pm \sqrt{F_{12}^2 - F_{11}F_{22}}}{F_{22}};$$

und darauf die zugehörigen Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

[§ 159, Gl. (7.), (8.) und (8a.); § 160, Gl. (16a.)]

266.) Hat die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkte D mit den Koordinaten x, y einen *dreifachen* Punkt, so müssen die sechs Gleichungen

$$F = 0, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. Die drei zugehörigen Werte von $\frac{dy}{dx}$ findet man dann aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)^{(3)} = 0. \qquad \text{[§ 161, Gl. (2.)]}$$

267.) Hat die Kurve $F(x, y) = 0$ im Punkte D mit den Koordinaten x, y eine *Spitze* (einen *Rückkehrpunkt*), so müssen die vier Gleichungen

$$F(x, y) = 0, \; F_1(x, y) = 0, \; F_2(x, y) = 0 \text{ und } F_{12}^2 - F_{11}F_{22} = 0$$

gleichzeitig befriedigt werden. [§ 162, Gl. (2.)]

268.)
$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial x}k\right)^{(2)}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)^{(n)} + R,$$

wobei

$$R = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta h, y+\Theta k)}{\partial y}k\right)^{(n+1)}$$
$$= \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x+\Theta_1 h, y+\Theta_1 k)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}k\right)^{(n)}\right].$$

[§ 163, Gl. (8a.), (9a.) und (10a.)]

269.)
$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

heißt eine „*homogene Funktion* m^{ten} *Grades*", wenn

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n);$$

dann wird

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = mz,$$

$$\left(x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{(2)} = m(m-1)z,$$

. . . .

[§ 164, Gl. (2.), (10.) und (14.)]

270.) $z = f(x, y)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} > 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$$

$z = f(x, y)$ wird ein *Maximum*, wenn

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_{11} < 0, \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 > 0;$$

$z = f(x, y)$ wird dagegen *weder* ein Maximum *noch* ein Minimum, wenn zwar

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad \text{aber} \quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 < 0.$$

[§ 165, Gl. (63.) bis (65.)]

271.) $u = f(x, y, z)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0,$$

und wenn

$$D_1 = f_{11} > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} f_{13} \\ f_{21} f_{22} f_{23} \\ f_{31} f_{32} f_{33} \end{vmatrix} > 0;$$

$u = f(x, y, z)$ wird ein *Maximum*, wenn

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0,$$

und wenn

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0.$$

[§ 167, Gl. (3.), (5.), (26.) und (27.)]

272.) $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird ein *Minimum*, wenn

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \; f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

und wenn

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 > 0, \ldots D_n > 0,$$

wobei

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \cdots f_{1\alpha} \\ f_{21} f_{22} \cdots f_{2\alpha} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{\alpha 1} f_{\alpha 2} \cdots f_{\alpha\alpha} \end{vmatrix};$$

$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ wird ein *Maximum*, wenn wieder

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \; f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

und wenn

$$D_{2r-1} < 0, \quad D_{2r} > 0 \quad \text{für} \quad r = 1, 2, \cdots \frac{n}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{n+1}{2},$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist. [§ 167.]

273.) Um die Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu finden, für welche

$$u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ein Maximum oder Minimum wird, wenn zwischen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die m Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \ldots \varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

bestehen, bezeichne man

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x_1, x_2, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} \quad \text{mit} \quad \varphi_{\alpha\beta}$$

und bilde die Funktion

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda_1\varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) + \lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Bestimmt man hierbei die m Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ aus den m Gleichungen

$$\begin{aligned} F_1 &= f_1 + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{21} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m1} = 0, \\ F_2 &= f_2 + \lambda_1\varphi_{12} + \lambda_2\varphi_{22} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m2} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m &= f_m + \lambda_1\varphi_{1m} + \lambda_2\varphi_{2m} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mm} = 0, \end{aligned}$$

so kann nur dann ein Maximum oder ein Minimum eintreten, wenn auch noch die $n - m$ Gleichungen

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= f_{m+1} + \lambda_1\varphi_{1,\,m+1} + \lambda_2\varphi_{2,\,m+1} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,\,m+1} = 0, \\ F_{m+2} &= f_{m+2} + \lambda_1\varphi_{1,\,m+2} + \lambda_2\varphi_{2,\,m+2} + \cdots + \lambda_m\varphi_{m,\,m+2} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_n &= f_n + \lambda_1\varphi_{1n} + \lambda_2\varphi_{2n} + \cdots + \lambda_m\varphi_{mn} = 0 \end{aligned}$$

befriedigt werden. Auf diese Weise erhält man für die Berechnung der $m + n$ Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m, x_1, x_2, \ldots x_n$ genau $m + n$ Gleichungen, nämlich

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_m = 0$$

und

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots F_n = 0.$$

[§ 169, Gl. (1.), (8.), (10.), (13.), (16.) und (17.)]

Alphabetisches Verzeichnis über die Bedeutung der in den Formeln benutzten Buchstaben.

(Mitunter wird derselbe Buchstabe auch in verschiedener Bedeutung benutzt.)

$A, A_1, A_2, \dots$ willkürliche Konstante.
$B, B_1, B_2, \dots$ willkürliche Konstante.
$C, C_1, C_2, \dots$ willkürliche Konstante.
$D_1, D_2, D_3, \dots$ Determinanten erster, zweiter, dritter usw. Ordnung.
F Flächeninhalt einer ebenen Figur.
$F(x)$ Funktion von x.
$F(x, y)$ Funktion von x und y.
$F(x, y, z)$ Funktion von x, y und z.
$F_1(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ partielle Ableitung nach x.
$F_2(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ partielle Ableitung nach y.
K Krümmungsmaß von *Gauß*.
N Normale.
O Flächeninhalt einer krummen Oberfläche.
Sn Subnormale.
St Subtangente.
T Tangente.
U Umfang.
V Volumen eines Körpers.

$a, a_1, a_2, \dots a_n$ willkürliche Konstante.
$\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ zyklometrische Funktionen.
b Basis eines Logarithmen-Systems.
$b, b_1, b_2, \dots b_n$ willkürliche Konstante.
$c, c_1, c_2, \dots c_n$ willkürliche Konstante.
$\cos x$ trigonometrische Funktion Cosinus.
$\operatorname{ctg} x$ trigonometrische Funktion Cotangens.

d und ∂ Differential.
$e = 2{,}718\,281\,828\,459$ Basis der natürlichen Logarithmen.
$f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... Funktionen von x.
$f(x, y)$ Funktion von x und y.
$f_1(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ partielle Ableitung nach x,
$f_2(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ partielle Ableitung nach y.
$g(x)$ (ganze rationale) Funktion von x.
h Höhe.
$i = \sqrt{-1}$.
ln oder lognat Logarithmus naturalis.
$m = \operatorname{tg} \alpha$ Richtungstangente.
n Grad einer ganzen rationalen Funktion oder einer algebraischen Gleichung.
$p = \frac{dy}{dx}$, wenn $y = f(x)$.
$p = \frac{\partial z}{\partial x}$, wenn $z = f(x, y)$.
q Quotient, insbesondere bei geometrischen Progressionen.
$q = \frac{d^2y}{dx^2}$, wenn $y = f(x)$.
$q = \frac{\partial z}{\partial y}$, wenn $z = f(x, y)$.
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ absoluter Betrag der komplexen Größe $a + bi$.
r Radius vektor.
$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, wenn $z = f(x, y)$.
s Bogenlänge bei ebenen Kurven und bei Kurven doppelter Krümmung.
$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, wenn $z = f(x, y)$.
$\sin x$ trigonometrische Funktion Sinus.
t unabhängige Veränderliche, insbesondere bei Parameter-Darstellung.
$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, wenn $z = f(x, y)$.
$\operatorname{tg} x$ trigonometrische Funktion Tangens.
u, v differentiierbare Funktionen von x.
u, v, w veränderliche Größen.
x unabhängige Veränderliche.
x Abszisse eines Punktes P.
y Ordinate eines Punktes P.
x, y, z Koordinaten eines Punktes P im Raume.

$\mathfrak{Ar}\mathfrak{Sin}\,x$, $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}\,x$, $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Tg}\,x$, $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Ctg}\,x$ Umkehrungen der hyperbolischen Funktionen.
$\mathfrak{Cof}\,x$ hyperbolische Funktion Cosinus.
$\mathfrak{Ctg}\,x$ hyperbolische Funktion Cotangens.
$\mathfrak{Sin}\,x$ hyperbolische Funktion Sinus.
$\mathfrak{Tg}\,x$ hyperbolische Funktion Tangens.

$\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \ldots \mathfrak{f}_n$ elementare symmetrische Funktionen der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und deshalb Koeffizienten in einer algebraischen Gleichung.

Δ Determinante.
$\Delta x = x_1 - x$, $\Delta y = y_1 - y$ Differenzen.
Θ unbestimmte Größe zwischen 0 und 1.
$\Phi(x)$ Funktion von x.

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Winkel, den eine Gerade, insbesondere die Tangente mit der positiven Richtung der X-Achse bildet.
$\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ Winkel, den eine Gerade im Raume mit der positiven Richtung der Y-Achse bildet.
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Winkel, den eine Gerade im Raume mit der positiven Richtung der Z-Achse bildet.
γ Winkel zwischen schiefwinkligen Koordinaten.
δ, ε verschwindend kleine Größen.
η Ordinate des Kreismittelpunktes.
μ Winkel, den die Tangente mit dem Radius vektor bildet.
ξ Abszisse des Kreismittelpunktes.
ξ, η, ζ Koordinaten des Mittelpunktes einer Kugel und eines Kreises im Raume.
π Umfang des Kreises mit dem Halbmesser 1.
ϱ Halbmesser eines Kreises, insbesondere des Krümmungskreises.
ϱ Halbmesser einer Kugel.
φ Argument einer komplexen Größe $a + bi$, erklärt durch die Gleichungen $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
φ Argument bei Polarkoordinaten, d. h. Winkel, den der Radius vektor mit der Anfangsrichtung bildet.
$\varphi(t)$, $\psi(t)$ Funktionen von t.
$\varphi(x)$, $\psi(x)$ Funktionen von x.

Alphabetisches Inhalts-Verzeichnis.

(Die Ziffern geben die Seitenzahlen an.)





Druck von Gebauer-Schwetschke G. m. b. H., Halle a. S.







